



# ریاضیات پایه و مقدمات آمار ۲

(مدیریت، حسابداری و اقتصاد)

دکتر موسی الرضا شمسیه زاهدی

## فهرست

| هفت | پیشگفتار                            |
|-----|-------------------------------------|
| ۱   | فصل ۱ انتگرال                       |
| ۲   | ۱-۱ انتگرال نامعین                  |
| ۱۲  | ۲-۱ روش تغییر متغیر در انتگرال گیری |
| ۱۶  | ۳-۱ روش انتگرال گیری جزء به جزء     |
| ۲۱  | ۴-۱ روش تجزیه کسرها در انتگرال گیری |
| ۲۹  | ۵-۱ انتگرال معین                    |
| ۴۰  | ۶-۱ کاربرد انتگرال معین             |
| ۴۸  | ۷-۱ کاربردهای اقتصادی انتگرال معین  |
| ۵۱  | ۸-۱ آشنایی با معادلات دیفرانسیل     |
| ۵۹  | فصل ۲ بردار و ماتریس                |
| ۶۰  | ۱-۲ بردارها                         |
| ۶۵  | ۲-۲ ماتریس                          |
| ۷۶  | ۳-۲ دترمینان                        |
| ۸۵  | ۴-۲ وارون ماتریس                    |

|     |                                                  |       |
|-----|--------------------------------------------------|-------|
| ۹۰  | کاربردی از ماتریس‌ها در رمز نویسی                | ۵-۲   |
| ۹۳  | اعمال سطری مقدماتی                               | ۶-۲   |
| ۱۰۳ | دستگاه معادلات خطی                               | فصل ۳ |
| ۱۰۴ | دستگاه معادلات خطی                               | ۱-۳   |
| ۱۰۸ | حل دستگاه معادلات خطی $n \times n$               | ۲-۳   |
| ۱۱۳ | روش‌های کلی حل دستگاه                            | ۳-۳   |
| ۱۳۹ | تبدیل خطی و مقادیر ویژه                          | فصل ۴ |
| ۱۴۰ | فضای برداری $R^n$                                | ۱-۴   |
| ۱۴۷ | تبدیلات خطی                                      | ۲-۴   |
| ۱۵۴ | مقادیر ویژه و بردارهای ویژه                      | ۳-۴   |
| ۱۶۱ | توابع چند متغیره و مشتقات جزئی                   | فصل ۵ |
| ۱۶۳ | توابع چند متغیره                                 | ۱-۵   |
| ۱۶۷ | حد و پیوستگی                                     | ۲-۵   |
| ۱۷۴ | مشتقات جزئی                                      | ۳-۵   |
| ۱۸۲ | دیفرانسیل کل، قاعده‌ی زنجیره‌ای و مشتق‌گیری ضمنی | ۴-۵   |
| ۱۹۱ | کاربردهایی از مشتق جزئی                          | ۵-۵   |
| ۱۹۵ | ماکسیمم و مینیمم توابع دو متغیره                 | ۶-۵   |
| ۲۰۵ | ماکسیمم و مینیمم توابع چند متغیره‌ی مقید         | ۷-۵   |
| ۲۱۸ | منابع                                            |       |
| ۲۱۹ | نمایه                                            |       |

# فصل اول

## انتگرال

### هدف کلی

هدف کلی این فصل آشنایی دانشجو با مفاهیم انتگرال معین و نامعین و برخی از کاربردهای آن است.

### اهداف رفتاری

دانشجو پس از مطالعه‌ی دقیق این فصل بایستی بتواند:

۱. مفهوم پادمشتق را توضیح دهد.
۲. مفهوم انتگرال معین را توضیح دهد و انتگرال نامعین توابع داده شده را محاسبه کند.
۳. ویژگی‌های انتگرال نامعین را بیان کند.
۴. فرمول‌ها و قواعد انتگرال‌گیری را در حل انتگرال‌های مختلف به کار گیرد.
۵. درک مناسبی از مفهوم هندسی انتگرال معین داشته باشد.
۶. ارتباط موجود بین انتگرال معین و نامعین را شرح دهد.
۷. انتگرال معین توابع داده شده را محاسبه کند.
۸. ویژگی‌های انتگرال معین را در حل مسائل مربوطه مورد توجه قرار دهد.
۹. در مورد کاربردهای انتگرال معین آشنایی لازم را کسب نماید.

## مقدمه

امروزه اهمیت علم حساب دیفرانسیل و انتگرال در علوم و فنون مختلف بیش از پیش بر همگان به اثبات رسیده است. یافتن شیب خط مماس بر نمودار یک تابع داده شده و مساحت زیر منحنی از جمله اهداف پایه گذاری این دانش نظری بوده است. قبلاً دیدیم که مفهوم مشتق ابزار مناسبی برای محاسبه‌ی شیب خط مماس بر نمودار یک منحنی است. اکنون با بیان مفهوم انتگرال به دنبال یافتن مساحت ناحیه‌هایی هستیم که شکل هندسی خاصی ندارند و محدود به یک یا چند تابع هستند. در ابتدای این فصل انتگرال نامعین یک تابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس به معرفی انتگرال معین و کاربردهایی از آن در اقتصاد خواهیم پرداخت.

## ۱-۱ انتگرال نامعین

## ۱-۱-۱ مقدمه

پیش از این در درس ریاضیات پایه، با عمل مشتق‌گیری، آشنا شدیم. در آنجا با در اختیار داشتن ضابطه‌ی یک تابع (مشتق‌پذیر) قادر به یافتن تابع مشتق بودیم. اکنون به دنبال معرفی و بیان عکس این عمل خواهیم بود. عکس عمل مشتق را در اصطلاح «عمل پادمشتق» یا «یافتن تابع اولیه» برای یک تابع داده شده نامیم. پس هدف ما این است که با داشتن ضابطه‌ی  $f(x)$  بتوانیم تابع دیگری پیدا کنیم که مشتق آن برابر  $f(x)$  باشد.

## ۱-۱-۲ تعریف

اگر  $f(x)$  روی بازه‌ی  $I$  تعریف شده باشد، آنگاه یک پادمشتق (تابع اولیه) برای آن، تابعی مانند  $F(x)$  است که برای هر  $x$  در  $I$  داشته باشیم  $F'(x) = f(x)$ .

## مثال ۱-۱

یک تابع اولیه برای  $f(x) = 2x$  بیابید.

(حل)

باید تابع  $F(x)$  را چنان بیابیم که مشتق آن برابر  $2x$  باشد. با اندکی تأمل درمی‌یابیم

### انتگرال ۳

که  $F(x) = x^2$  دارای این خاصیت است، زیرا :

$$F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$$

پس  $F(x) = x^2$  یک پادمشتق برای  $f(x) = 2x$  است. ■

**سؤال:** آیا می‌توان پادمشتق دیگری نیز برای  $f(x) = 2x$  یافت؟

پاسخ سؤال قبل به شدت مثبت است! زیرا مشتق عبارت‌های  $x^2 + 1$ ،  $x^2 + 3$ ،  $x^2 + \sqrt{2}$  و  $x^2 + (-5)$  ... همگی برابر  $x^2$  است. پس  $f(x) = 2x$  دارای بی‌نهایت پادمشتق است و می‌توان آن‌ها را به صورت کلی  $x^2 + C$  نمایش داد که در آن  $C$  معرف یک عدد ثابت دلخواه است. در اینجا می‌گوییم که انتگرال نامعین تابع  $f(x) = 2x$  برابر  $x^2 + C$  است و می‌نویسیم:

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

#### ۳-۱-۱ تعریف

اگر  $F(x)$  یک پادمشتق برای تابع  $f(x)$  در بازه‌ی  $I$  باشد، انتگرال نامعین  $f(x)$  را با نماد  $\int f(x) dx$  نمایش می‌دهیم و داریم  $\int f(x) dx = F(x) + C$ .

#### تذکر ۱-۱

باید توجه کنیم که  $\int f(x) dx$  یک خانواده از توابع را نمایش می‌دهد، یعنی خانواده‌ی  $F(x) + C$ ، که در آن به عدد ثابت  $C$ ، ثابت انتگرال گیری گوئیم.

#### تذکر ۲-۱

نماد دیفرانسیلی  $dx$  که هم در عمل مشتق‌گیری و هم در عمل انتگرال به صورت‌های  $\int (... ) dx$  و  $\frac{d}{dx} (...)$  ظاهر شده است، در واقع مشخص‌کننده‌ی متغیر مستقل است. در جدول (۱-۱) چند مثال از فرمول‌های مشتق و انتگرال‌های معادل آن‌ها با در نظر گرفتن متغیر مستقل دیده می‌شود:

جدول ۱-۱

| فرمول مشتق                                              | فرمول انتگرال معادل                            |
|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| $\frac{d}{dx}(x^r + x) = rx^{r-1} + 1$                  | $\int (rx^{r-1} + 1)dx = x^r + x + C$          |
| $\frac{d}{dt}(\sqrt{t}) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$          | $\int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \sqrt{t} + C$    |
| $\frac{d}{du}(\sin u) = \cos u$                         | $\int \cos u du = \sin u + C$                  |
| $\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}$ | $\int \frac{-1}{z^2}dz = \frac{1}{z} + C$      |
| $\frac{d}{d\theta}(\tan \theta) = \sec^2 \theta$        | $\int \sec^2 \theta d\theta = \tan \theta + C$ |
| $\frac{d}{dy}(f'(y)) = f''(y)$                          | $\int f''(y)dy = f'(y) + C$                    |

#### ۱-۱-۴ فرمول‌های انتگرال

در جدول (۱-۲) چند فرمول اصلی عمل انتگرال‌گیری، که به‌طور مستقیم به کمک فرمول‌های مشتق به‌دست آمده‌اند، به همراه فرمول مشتق متناظر با آن، آورده شده است که به‌عنوان اولین گام در مسیر حل مسائل انتگرال باید همواره آن‌ها را در خاطر داشته باشیم. کاربردی‌ترین فرمول انتگرال جدول مورد نظر، فرمول زیر است که به آن فرمول توانی برای انتگرال گفته می‌شود:

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

دقت کنیم که فرمول توانی درمورد توان‌هایی از  $x$  که مخالف "۱- " باشد، استفاده می‌شود و در مورد توان برابر با "۱- " از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C$$

## انتگرال ۵

جدول ۲-۱

| فرمول مشتق                                                             | فرمول انتگرال                                             |
|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $\frac{d}{dx}(C) = 0$                                                  | $\int 0 dx = C$                                           |
| $\frac{d}{dx}(x) = 1$                                                  | $\int 1 dx = x + C$                                       |
| $\frac{d}{dx}(ax) = a$                                                 | $\int a dx = ax + C$                                      |
| $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right) = x^r \quad (r \neq -1)$ | $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$ |
| $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$                                        | $\int \cos x dx = \sin x + C$                             |
| $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$                                       | $\int \sin x dx = -\cos x + C$                            |
| $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$                                      | $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$                           |
| $\frac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$                                     | $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$                          |
| $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$                                              | $\int e^x dx = e^x + C$                                   |

## مثال ۲-۱

به کمک فرمول توانی انتگرال حاصل هر قسمت را بیابید:

الف)  $\int x^6 dx$       ب)  $\int \sqrt{x} dx$       ج)  $\int \frac{1}{x} dx$       د)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$       حل

الف)  $\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = \frac{x^7}{7} + C$

ب)  $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$

ج)  $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C$

د)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

یادآوری: در مورد قسمت‌های ب)، ج) و د) در مثال قبل قواعدی از مبحث رادیکال و توان را به کار برده‌ایم که عبارت‌اند از:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad (۴) \quad \frac{1}{a} = a^{-1} \quad (۳) \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (۲) \quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \quad (۱)$$

### ۱-۱-۵ قواعد اساسی انتگرال

الف) ضریب ثابت از انتگرال عبور می‌کند، یعنی:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

(دقت کنیم در مورد مشتق نیز این قاعده برقرار بود، یعنی  $((kf)') = kf'$ )

#### مثال ۱-۳

$$\int -9x^2 dx = -9 \int x^2 dx = -9 \left( \frac{x^{2+1}}{2+1} \right) + C = -3x^3 + C$$

و

$$\int_0^x x dx = \frac{1}{2} \int_0^x x dx = \frac{1}{2} \left( \frac{x^{1+1}}{1+1} \right) + C = \frac{x^2}{2} + C$$

ب) جمع و تفریق در انتگرال:

$$\int (f \pm g)dx = \int f dx \pm \int g dx$$

(در محاسبه‌ی مشتق نیز این قاعده برقرار است، یعنی  $((f \pm g)') = f' \pm g'$ )

#### مثال ۱-۴

به‌کارگیری قاعده‌ی ب) در مثال‌های بعد نشان داده شده است:

الف)

$$\int (x^2 + \sqrt{x})dx = \int x^2 dx + \int \sqrt{x} dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

## انتگرال ۷

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{x^3 + 2\sqrt{x^3}}{3} + C$$

$$\int (\cos x - 5) dx = \int \cos x dx - \int 5 dx = \sin x - 5x + C \quad (\text{ب})$$

(ج)

$$\int (e^x + 3 \sin x) dx = \int e^x dx + 3 \int \sin x dx = e^x - 3 \cos x + C$$

## تذکره ۳-۱

قاعده‌ی جمع و تفریق را نه تنها برای مجموع و تفاضل دو تابع، بلکه برای هر تعداد متناهی از توابع نیز می‌توان به‌کار برد.

## مثال ۵-۱

حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

$$\begin{array}{ll} \int (2x+1)^2 dx & (\text{ب}) \\ \int -7x(3x^2-5) dx & (\text{الف}) \\ \int (x^2+x+2)^2 dx & (\text{ج}) \\ \int (x-1)(x^2-3x+1) dx & (\text{د}) \end{array}$$

(حل)

$$\int -7x(3x^2-5) dx = \int (-21x^3 + 35x) dx \quad (\text{الف})$$

$$= -21 \int x^3 dx + 35 \int x dx$$

$$= -21 \frac{x^4}{4} + 35 \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int (2x+1)^2 dx = \int (4x^2 + 4x + 1) dx \quad (\text{ب})$$

$$= 4 \int x^2 dx + 4 \int x dx + \int dx$$

$$= 4 \frac{x^3}{3} + 4 \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$\int (x^2+x+2)^2 dx = \int (x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4) dx \quad (\text{ج})$$

$$= \int x^4 dx + 2 \int x^3 dx + 5 \int x^2 dx + 4 \int x dx + 4 \int dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + 2 \frac{x^4}{4} + 5 \frac{x^3}{3} + 4 \frac{x^2}{2} + 4x + C$$

$$\begin{aligned}
 \int (x-1)(x^3-3x+1)dx &= \int (x^4-3x^2+x-1)dx \\
 &= \int x^4 dx - 3 \int x^2 dx + \int x dx - \int dx \\
 &= \frac{x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C
 \end{aligned}
 \tag{د}$$

#### مثال ۶-۱

پادمشتق  $G(x)$  از تابع  $f(x) = x^3 + x + 1$  را طوری بیابید که  $G(0) = 1$ .

(حل)

صورت کلی پادمشتق‌های تابع  $f(x)$  برابر با  $\int f(x)dx$  است، اما داریم:

$$\int f(x)dx = \int (x^3 + x + 1)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C$$

پس  $G(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C$ . اما از شرط  $G(0) = 1$  داریم  $C = 1$  و بنابراین

$$\blacksquare \cdot G(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

#### تذکره ۴-۱

برخلاف عمل مشتق‌گیری، برای ضرب و تقسیم انتگرال‌ها قاعده‌ی خاصی وجود ندارد!

(ج) مشتق‌گیری از انتگرال:

$$\frac{d}{dx} \left( \int f(x)dx \right) = \left( \int f(x)dx \right)' = f(x)$$

به‌طور مثال داریم:

$$\frac{d}{dx} \left( \int \sin^{\circ} x dx \right) = \sin^{\circ} x \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx} \left( \int x \ln x dx \right) = x \ln x$$

(د) انتگرال‌گیری از مشتق:

$$\int \frac{d}{dx} (f(x)) dx = \int f'(x) dx = f(x) + C$$

### مثال ۷-۱

با به کارگیری قاعده‌ی انتگرال‌گیری از مشتق داریم:

$$\int \frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 - 3}{\sin x} \right) dx = \frac{x^2 - 3}{\sin x} + C$$

و همچنین

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x dx &= \int ((\tan^2 x + 1) - 1) dx = \int (1 + \tan^2 x) dx - \int dx \\ &= \int (\tan x)' dx - \int dx \\ &= \tan x - x + C \end{aligned}$$

### ۶-۱-۱ توابع کل و نهایی

از جمله کاربردهای اصلی انتگرال نامعین در اقتصاد، یافتن تابع هزینه‌ی کل از هزینه‌ی نهایی و یا تابع در آمد کل از یک تابع درآمد نهایی معلوم، است. اگر  $q$  متغیر تولید روزانه‌ی یک بنگاه اقتصادی باشد و  $MC(q)$  و  $TC(q)$  به ترتیب نشان دهنده‌ی تابع هزینه‌ی نهایی و تابع هزینه‌ی کل باشند، می‌دانیم که:

$$\frac{d}{dq}(TC(q)) = MC(q)$$

بنابراین:

$$TC(q) = \int MC(q) dq$$

یعنی با معلوم بودن تابع هزینه‌ی نهایی می‌توان تابع هزینه‌ی کل را با انتگرال‌گیری از تابع هزینه‌ی نهایی به دست آورد. دقت کنیم که در این صورت در نمایش تابع هزینه‌ی کل، ثابت  $C$  به عنوان یک مجهول ظاهر می‌شود و این مجهول به عنوان هزینه‌های ثابت آن بنگاه در نظر گرفته می‌شود، یعنی هزینه‌هایی که در حالت  $q=0$  وجود دارند.

### مثال ۸-۱

اگر تابع هزینه‌ی نهایی یک بنگاه اقتصادی برابر  $MC(q) = 6q^2 - 6q + 5$  باشد و برای  $q=4$  هزینه‌ی کل برابر ۲۰۰ باشد، تابع هزینه‌ی کل بنگاه را مشخص کنید.

(حل)

$$TC(q) = \int (6q^2 - 6q + 5) dq = 2q^3 - 3q^2 + 5q + C$$

دقت کنیم که با قرار دادن  $q = 0$  داریم  $TC(0) = C$  و این مجهول نشان‌دهنده‌ی هزینه‌های ثابت تولید بنگاه بدون توجه به مقدار تولید است. با توجه به این که بنا بر فرض مسئله  $TC(0) = 200$ ، می‌توان به محاسبه‌ی این مقدار مجهول پرداخت:

$$TC(0) = 2(0)^3 - 3(0)^2 + 5(0) + C = 200$$

پس از انجام محاسبه داریم  $C = 200$ . بنابراین تابع هزینه‌ی کل بنگاه برابر است با:

$$TC(q) = 2q^3 - 3q^2 + 5q + 200 \quad \blacksquare$$

به طریق مشابه با دانستن رابطه‌ی تابع درآمد نهایی یعنی  $MR(q)$  و تابع درآمد کل یعنی  $TR(q)$ ، داریم  $\frac{d}{dq}(TR(q)) = MR(q)$ ، پس  $TR(q) = \int MR(q) dq$ .

## مثال ۹-۱

اگر تابع درآمد نهایی یک بنگاه اقتصادی به صورت  $MR(q) = 8 - 0.2q$  باشد، تابع درآمد کل را بیابید.

(حل)

$$TR(q) = \int (8 - 0.2q) dq = 8q - 0.1q^2 + C$$

ملاحظه می‌کنید که باز هم ثابت انتگرال گیری به عنوان یک مجهول در تابع درآمد کل ظاهر گردید. اما با توجه به این که درآمد کل این بنگاه وقتی تولید روزانه صفر باشد ( $q = 0$ )، برابر صفر است ( $TR(0) = 0$ )، پس می‌توان نتیجه گرفت که ثابت انتگرال گیری برابر صفر است، یعنی تابع درآمد کل به صورت

$$TR(q) = \int (8 - 0.2q) dq = 8q - 0.1q^2$$

خواهد بود.  $\blacksquare$ تمرین‌های بخش ۱-۱ 

۱. مشتقات زیر را بیابید و برای هر کدام یک انتگرال بنویسید.

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{dx} \left( \sqrt{x^2 + 4} \right) \text{ (ب)} & \frac{d}{dx} \left( \frac{x^2}{x+3} \right) \text{ (الف)} \\ \frac{d}{dz} (e^{\sin z}) \text{ (د)} & \frac{d}{dt} (t \tan t - \sin t) \text{ (ج)} \end{array}$$

۲. به کمک فرمول توانی برای انتگرال، حاصل هر قسمت را بیابید.

$$\begin{array}{lll} \int u^4 \sqrt{u} du \text{ (ج)} & \int \frac{x}{3} dx \text{ (ب)} & \int s^{23} ds \text{ (الف)} \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^4}} dx \text{ (و)} & \int \frac{1}{v^{11}} dv \text{ (ه)} & \int \sqrt[4]{t^3} dt \text{ (د)} \end{array}$$

۳. حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

$$\begin{array}{ll} \int (x^{-\frac{2}{3}} - 4x^{-\frac{1}{5}} + \frac{9}{v}) dx \text{ (ب)} & \int (3x + \frac{4}{\sqrt{x^5}}) dx \text{ (الف)} \\ \int \frac{t^5 - 4t^3}{t^2} dt \text{ (د)} & \int (\frac{1}{x^4} - 5\sqrt{x} + \sqrt{x^3}) dx \text{ (ج)} \\ \int (2 + e^{2+x}) dx \text{ (و)} & \int z(z^3 - 1) dz \text{ (ه)} \\ \int 2(\csc^2 x + 2 \sec x \tan x) dx \text{ (ح)} & \int \sqrt[3]{s}(s+1)^2 ds \text{ (ز)} \\ \int \frac{1}{\sec x} dx \text{ (ی)} & \int (5 \sin \theta - \sqrt{3} \sec^2 \theta) d\theta \text{ (ط)} \end{array}$$

۴. با ذکر مثالی نشان دهید که رابطه‌های

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx} \text{ و } \int f(x)g(x) dx = \int f(x) dx \int g(x) dx$$

لزوماً برقرار نیستند.

۵. پادمشتقی چون  $G(x)$  برای تابع  $f(x) = (x-2)^2$  بیابید که در شرط  $G(1) = 0$  صدق کند.

۶. فرض کنیم تابع هزینه نهایی یک بنگاه تولیدی به صورت

$$MC(q) = 0.7q^2 - 6q + 20$$

و هزینه کل تولید برای ۱۰ قلم کالا برابر ۲۰۰ واحد باشد. تابع هزینه کل بنگاه را بیابید.

۷. فرض کنیم  $P(t)$  تابع تولید کارخانه ای پس از  $t$  ساعت کار باشد و همچنین آهنگ

لحظه‌ای تولید در لحظه‌ی  $t$  برابر  $t^2 - \frac{1}{4}t$  و  $P'(t) = 60 + 2t$  واحد در ساعت باشد. تابع تولید این کارخانه را بیابید.

### ۲-۱ روش تغییر متغیر در انتگرال‌گیری

یکی از ساده‌ترین ترفندها در انتگرال‌گیری، استفاده از یک متغیر جدید به جای یک عبارت برحسب متغیر اولیه است، برای شروع به مثال‌های زیر توجه کنید:

#### مثال ۱-۱۰

فرض کنید بخواهیم حاصل انتگرال  $\int (1+x)^2 dx$  را بیابیم. در این صورت کافی است که اتحاد مربع مجموع دو جمله‌ای در مورد  $(1+x)^2$  را به کار برده و آن را به صورت  $1 + 2x + x^2$  بنویسیم، بنابراین بنابه قاعده‌ی جمع و فرمول توانی به راحتی می‌توان به محاسبه آن پرداخت:

$$\int (1+x)^2 dx = \int (1 + 2x + x^2) dx = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + C. \blacksquare$$

اکنون تصور کنید که بخواهیم حاصل انتگرال  $\int (1+x)^{100} dx$  را محاسبه کنیم. بدیهی است با توجه به این که توان عبارت داخل پرانتز در این انتگرال به گونه‌ای نیست که بتوان از اتحاد خاصی استفاده کرد، پس بایستی به طریقی دیگر عمل نمود. روش کار بدین گونه است که متغیر جدید  $u$  را به صورت زیر انتخاب کنیم:

$$1+x = u$$

با دیفرانسیل‌گیری از طرفین تساوی فوق داریم  $d(1+x) = du$  یعنی  $dx = du$ . بنابراین:

$$\int (1+x)^{100} dx = \int u^{100} du = \frac{u^{101}}{101} + C = \frac{(1+x)^{101}}{101} + C. \blacksquare$$

#### مثال ۱-۱۱

در هر قسمت با توجه به تغییر متغیر پیشنهاد شده حاصل انتگرال را بیابید.

$$\int 2x(x^2 - 1)^{45} dx \quad \text{و} \quad x^2 - 1 = u \quad \text{(الف)}$$

### انتگرال ۱۳

$$\int \sqrt[3]{3-x} dx \quad \text{و} \quad 3-x=u \quad (\text{ب})$$

$$\int \cos(x+\epsilon) dx \quad \text{و} \quad x+\epsilon=u \quad (\text{ج})$$

(حل)

الف) قرار می‌دهیم  $u = 3-x$  پس با دیفرانسیل‌گیری از طرفین رابطه فوق

داریم  $d(3-x) = du$ ، یعنی  $dx = -du$  و لذا  $\int \sqrt[3]{3-x} dx = \int \sqrt[3]{u} (-du)$  بنابراین:

$$\int \sqrt[3]{3-x} dx = \int \sqrt[3]{u} (-du) = -\int \sqrt[3]{u} du = -\frac{u^{4/3}}{4/3} + C = -\frac{3}{4} (3-x)^{4/3} + C \quad \blacksquare$$

ب) قرار می‌دهیم  $u = x+\epsilon$  و از طرفین آن دیفرانسیل می‌گیریم، پس داریم:

$$d(x+\epsilon) = du$$

یعنی  $dx = du$  یا  $-dx = -du$  بنابراین:

$$\int \sqrt[3]{3-x} dx = \int \sqrt[3]{u} du = \int u^{1/3} du = \frac{3}{4} u^{4/3} + C = \frac{3}{4} (3-x)^{4/3} + C \quad \blacksquare$$

ج) قرار می‌دهیم  $u = x+\epsilon$ ، پس:

$$d(x+\epsilon) = du$$

یعنی  $dx = du$ ، بنابراین:

$$\int \cos(x+\epsilon) dx = \int \cos u du = \sin u + C = \sin(x+\epsilon) + C \quad \blacksquare$$

با توجه به مثال‌های قبل دریافتیم که در روش تغییر متغیر، نخست متغیر جدیدی مانند  $u$  را به‌طور مناسبی انتخاب می‌کنیم و در ادامه با محاسبه  $du$  و جایگذاری متغیر جدید در انتگرال داده شده، سعی می‌کنیم که انتگرال را به شکلی تبدیل کنیم که به کمک فرمول‌ها و قواعد انتگرال، قابل حل باشد. پس از حل انتگرال برحسب متغیر جدید بایستی جواب را برحسب همان متغیر اولیه مسئله نوشت.

### تذکره ۱-۵

شاید در ابتدا، انتخاب مناسب متغیر جدید، یکی از موارد چالش‌برانگیز برای دانشجویان باشد، اما با انجام تمرین‌های فراوان می‌توان در این زمینه دارای مهارت و تجربه‌ی کافی گردید. البته می‌توان جهت افزایش سرعت، از فرمول‌های میان‌بر بعد که به کمک روش

تغییرمتغیر به دست آمده‌اند، نیز استفاده کرد.

$$\int f'(x)f(x)dx = \frac{(f(x))^r}{r} + C$$

و به طور کلی برای  $n \neq -1$  داریم:

$$\int f'(x)(f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

و در حالت  $n = -1$  داریم:

$$\int f'(x)(f(x))^{-1} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

همچنین فرمول‌های میان برزیر نیز می‌تواند سرعت محاسبات را در انتگرال‌گیری بیش‌تر نماید:

$$\int \sin ax dx = \frac{-1}{a} \cos ax + C$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

در مثال زیر کاربردی از فرمول‌های بالا را ملاحظه می‌کنید.

#### مثال ۱-۱۲

$$\int \cos x \sin x dx = \frac{(\sin x)^2}{2} + C \quad \blacksquare \quad \text{(الف)}$$

$$\int e^x (e^x + 2) dx = \frac{(e^x + 2)^2}{2} + C \quad \blacksquare \quad \text{(ب)}$$

$$\int 2x(x^2 - 3)^4 dx = \frac{(x^2 - 3)^5}{5} + C \quad \blacksquare \quad \text{(ج)}$$

$$\int \sin x \cos^5 x dx = -\int (-\sin x) \cos^4 x dx = -\frac{(\cos x)^5}{5} + C \quad \blacksquare \quad \text{(د)}$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C \quad \blacksquare \quad \text{(ه)}$$

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 + 3}{x^3 + 3x} dx = \frac{1}{3} \ln|x^3 + 3x| + C \quad \blacksquare \quad \text{(و)}$$

$$\int (e^{o x} - \sin \frac{x}{\gamma}) dx = \frac{1}{o} e^{o x} + \gamma \cos \frac{x}{\gamma} + C \quad \blacksquare \quad (ز)$$

تمرین‌های بخش ۱-۲ 

۱. در هر قسمت با اعمال تغییر متغیر داده شده، حاصل انتگرال را بیابید.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} dx, \quad u = \sqrt{x} \quad (\text{الف})$$

$$\int \frac{\gamma x}{\sqrt{\varepsilon x^2 + o}} dx, \quad u = \varepsilon x^2 + o \quad (\text{ب})$$

$$\int y \sqrt{1 + \gamma y^2} dy, \quad u = 1 + \gamma y^2 \quad (\text{ج})$$

$$\int \cos 19x dx, \quad u = 19x \quad (\text{د})$$

$$\int \sin(x - \pi) dx, \quad u = x - \pi \quad (\text{ه})$$

$$\int \frac{o x}{(x^2 + 1)^3} dx, \quad u = x^2 + 1 \quad (\text{و})$$

$$\int x \sin x^2 dx, \quad u = x^2 \quad (\text{ز})$$

$$\int (\gamma x + \gamma)(x^2 + \gamma x + \gamma)^{\frac{\varepsilon}{o}} dx, \quad u = x^2 + \gamma x + \gamma \quad (\text{ح})$$

۲. در هر قسمت تغییر متغیر مناسب را حدس زده و حاصل انتگرال را بیابید.

$$\int x^3 \sqrt{o + x^{\varepsilon}} dx \quad (\text{ج}) \quad \int \sin \frac{x}{3} dx \quad (\text{ب}) \quad \int (\varepsilon x - 3)^{3o} dx \quad (\text{الف})$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{\varepsilon - o x^2}} dx \quad (\text{و}) \quad \int \frac{\sin \frac{o}{x}}{x^2} dx \quad (\text{ه}) \quad \int t \sqrt{\gamma t^2 + \gamma} dt \quad (\text{د})$$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx \quad (\text{ی}) \quad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (\text{ح}) \quad \int \cos \varepsilon \theta \sqrt{\gamma - \sin \varepsilon \theta} d\theta \quad (\text{ز})$$

۳. با به کار بردن فرمول‌های میان‌بر حاصل هر قسمت را بنویسید.

$$\int \sin x \cos^9 x dx \quad (\text{ب}) \quad \int (1 + \tan^2 x) \tan x dx \quad (\text{الف})$$

$$\int \frac{1}{1 - \gamma x} dx \quad (\text{د}) \quad \int \cot x dx \quad (\text{ج})$$

$$\int \frac{x^{\wedge} - 2}{x^9 - 18x} dx \quad (ه)$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (و)$$

$$\int (\sin 2x - \cos 3x) dx \quad (ز)$$

$$\int \frac{2}{e^{3x}} dx \quad (ح)$$

### ۳-۱ روش انتگرال گیری جزء به جزء

#### ۱-۳-۱ فرمول جزء به جزء

این روش برخی از انتگرال‌های دشوار را به یک انتگرال ساده تبدیل می‌کند و اغلب در مورد انتگرال‌هایی که به صورت حاصل ضرب دو تابع هستند، به کار می‌رود. اساس کار روش جزء به جزء بر پایه‌ی استفاده از فرمولی موسوم به فرمول جزء به جزء است که اکنون به بیان آن می‌پردازیم:

با اعمال قاعده‌ی مشتق حاصل ضرب برای توابع  $u(x)$  و  $v(x)$  داریم:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه فوق داریم:

$$\int (uv)' dx = \int u'v dx + \int v'u dx$$

اما سمت چپ تساوی فوق برابر  $uv$  است و سمت راست آن را می‌توان با اعمال قواعد دیفرانسیلی  $du = u'dx$  و  $dv = v'dx$  به طریق دیگری نمایش داد، پس داریم:

$$uv = \int v du + \int u dv$$

و در نهایت فرمول جزء به جزء به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

#### مثال ۱-۱۳

حاصل  $\int x \cos x dx$  را بیابید.

(حل)

با توجه به این که یافتن حاصل این انتگرال به روش‌هایی که تاکنون دیده‌ایم، میسر نیست و این که عبارت زیر انتگرال به صورت حاصل ضرب دو تابع می‌باشد، به کارگیری روش جزء به جزء انتخاب مناسبی به نظر می‌رسد. اولین گام در این راه انتخاب

## انتگرال ۱۷

صحیح  $u$  و  $dv$  خواهد بود. فرض کنیم:

$$u = x \quad \text{و} \quad dv = \cos x dx$$

(انتخاب‌های دیگری که ممکن است برای  $u$  و  $dv$  داشته باشیم، را در ادامه بررسی می‌کنیم)

دومین گام، محاسبه‌ی  $du$  از  $u$  و همچنین  $v$  از  $dv$  است:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos x dx \Rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x$$

سومین گام در محاسبه‌ی این انتگرال استفاده از فرمول جزء به جزء است:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos x dx}_{dv} &= \underbrace{x \sin x}_{u v} - \int \underbrace{\sin x}_{v} \underbrace{dx}_{du} \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## تذکره ۱-۶

همان‌طور که در مثال قبل دیدیم، در هنگام انتگرال گرفتن از  $dv$  برای محاسبه  $v$ ، ثابت انتگرال‌گیری را حذف کردیم! این نکته را در تمام انتگرال‌هایی که به این طریق محاسبه می‌شوند، در نظر داشته باشید.

مهم‌ترین قسمت کار در روش جزء به جزء انتخاب صحیح  $u$  و  $dv$ ، برای به‌دست‌آوردن یک انتگرال آسان‌تر است. در حالت کلی روش مشخصی برای انجام سریع اینکار وجود ندارد و یک عمل تجربی است. نکته‌ای که اغلب در انتخاب ما ممکن است مفید باشد، این است که  $u$  را تابعی در نظر بگیریم که پس از مشتق‌گیری ساده‌تر شود و انتگرال‌گیری از قسمت باقی‌مانده یعنی  $dv$  آسان باشد. می‌بینیم که در مثال ۱-۱۳ این نکته با در نظر گرفتن  $u = x$  و  $dv = \cos x dx$  کاملاً رعایت شده است. حال در همان مثال اگر فرض کنیم که  $u = \cos x$  می‌بینیم که  $\frac{du}{dx} = -\sin x$  از  $u$

ساده‌تر نیست. به‌طور دقیق‌تر اگر:

$$u = \cos x \quad \text{و} \quad dv = x dx$$

$$du = -\sin x dx \quad \text{و} \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

در این صورت با جایگذاری مقادیر فوق در فرمول جزء به جزء داریم:

$$\int x \cos x dx = \frac{x^2}{2} \cos x - \int \frac{x^2}{2} (-\sin x) dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x dx$$

ملاحظه می‌کنید که با این نحوه‌ی انتخاب برای  $u$  و  $dv$  به انتگرالی به مراتب دشوارتر از انتگرال اولیه می‌رسیم!

## مثال ۱-۱۴

حاصل  $\int x e^x dx$  را بیابید.

(حل)

با در نظر گرفتن  $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases}$  داریم  $\begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$  بنابراین:

$$\int x e^x dx = \int u dv = uv - \int v du = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C \quad \blacksquare$$

## مثال ۱-۱۵

حاصل انتگرال  $\int \ln x dx$  را بیابید.

(حل)

یک انتخاب برای این مسئله به صورت  $u = 1$  و  $dv = \ln x dx$  است. اما این انتخاب خود

مستلزم حل انتگرال  $\int \ln x dx$  می‌باشد! اما انتخاب دیگر به صورت  $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases}$  است.

در این صورت داریم:

$$\begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$$

حال با قرار دادن مقادیر فوق در فرمول جزء به جزء داریم:

$$\int \ln x dx = \int u dv = uv - \int v du = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C \quad \blacksquare$$

## تذکره ۱-۷

ممکن است حل انتگرالی به طریق جزء به جزء مستلزم چندین بار استفاده از روش جزء به جزء باشد. به مثال بعد توجه کنید.

مثال ۱۶-۱

حاصل انتگرال  $\int x^2 e^{-x} dx$  را بیابید.

(حل)

با فرض  $u = x^2$  و  $dv = e^{-x} dx$  داریم:

$$du = 2x dx \quad \text{و} \quad v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x} dx &= \int u dv = uv - \int v du = x^2(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) 2x dx \\ &= -x^2 e^{-x} + 2 \underbrace{\int x e^{-x} dx}_B \end{aligned} \quad (*)$$

انتگرال آخر (یعنی B) شکل راحت‌تری نسبت به انتگرال اولیه دارد ( $x^2$  تبدیل به  $x$  شده است). با استفاده‌ی مجدد از روش جزء به جزء به محاسبه‌ی  $B = \int x e^{-x} dx$  می‌پردازیم:

$$\text{اگر } u = x \text{ و } dv = e^{-x} dx \text{ آنگاه داریم: } du = dx \text{ و } v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

پس:

$$B = \int x e^{-x} dx = x(-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

جایگذاری B در (\*) داریم:

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2B = -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) + C. \quad \blacksquare$$

در مورد حل تعدادی از انتگرال‌ها به روش جزء به جزء، ممکن است که پس از اعمال این روش دوباره به همان مسئله اولیه برسیم. برخی از این انتگرال‌ها در این حالت نیز قابل حل هستند. به مثال بعد توجه کنید:

مثال ۱۷-۱

حاصل انتگرال  $A = \int e^x \cos x dx$  را بیابید.

(حل)

با در نظر گرفتن  $u = \cos x$  و  $dv = e^x dx$  داریم:

$$du = -\sin x dx \quad \text{و} \quad v = \int e^x dx = e^x$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} A &= \int e^x \cos x dx = \int u dv = uv - \int v du = (\cos x) e^x - \int e^x (-\sin x) dx \\ &= e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \sin x dx}_B \quad (*) \end{aligned}$$

پس حل انتگرال A منجر به حل انتگرال B گردید. باز هم به روش جزء به جزء به حل انتگرال B می‌پردازیم. با فرض  $u = \sin x$  و  $dv = e^x dx$  داریم:

$$du = \cos x dx \quad \text{و} \quad v = \int e^x dx = e^x$$

پس:

$$B = \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - A$$

با قرار دادن مقدار B در فرمول (\*) داریم:

$$A = e^x \cos x + e^x \sin x - A$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$2A = e^x \cos x + e^x \sin x$$

یعنی

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x)$$

پس در نهایت داریم:

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C. \blacksquare$$

### تمرین‌های بخش ۱-۳

۱. در هر قسمت با توجه به  $u$  و  $dv$  پیشنهاد شده، حاصل انتگرال را بیابید.

الف)  $dv = e^{-x} dx$  و  $u = x$   $\int x e^{-x} dx$

ب)  $dv = e^{x^2} dx$  و  $u = x^2 + 1$   $\int (x^2 + 1) e^{x^2} dx$

ج)  $dv = dx$  و  $u = (\ln x)^2$   $\int (\ln x)^2 dx$

د)  $dv = e^x dx$  و  $u = \sin x$   $\int e^x \sin x dx$

۲. انتگرال‌های زیر را به روش جزء به جزء حل کنید.

الف)  $\int (x^2 - x) \cos x dx$  ب)  $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

$$\int \ln(3x-2)dx \quad \text{ج} \quad \int x^2 \sin x dx \quad \text{د}$$

#### ۴-۱ روش تجزیه کسرها در انتگرال گیری

یادآوری می‌کنیم که یک تابع گویا به شکل نسبت دو چندجمله‌ای بر هم است. در این قسمت روش انتگرال‌گیری توابع گویا را ارائه می‌دهیم. این روش بر پایه‌ی تجزیه‌ی یک تابع گویا به صورت مجموع کسرهای جزئی است. بنابراین نخست اشاره‌ای به بحث تجزیه‌ی کسرها خواهیم داشت و در این میان بحث انتگرال را نیز پیگیری می‌کنیم.

##### ۱-۴-۱ تعریف

کسر جزئی کسر گویایی است که به یکی از شکل‌های زیر باشد:

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \quad \text{الف)} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k} \quad \text{ب)}$$

در تعریف فوق  $k$  عددی طبیعی و  $A, B, a, b, c$  همگی اعدادی دلخواه از مجموعه‌ی اعداد حقیقی‌اند که  $a \neq 0$  و در حالت ب) شرط  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  برقرار است. در واقع شرط  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  بیان می‌کند که عبارت  $ax^2 + bx + c$  قابلیت تجزیه شدن را ندارد.

به‌طور کلی انتگرال‌گیری از کسرهای جزئی به فرم الف) به سادگی امکان‌پذیر است. فرمول میان‌بر برای کسر جزئی فرم الف :

$$\int \frac{A}{(ax+b)^k} dx = \begin{cases} \frac{A}{a} \ln|ax+b| + C & k=1 \\ \frac{A}{a} \frac{(ax+b)^{1-k}}{1-k} + C & k \neq 1 \end{cases}$$

اما انتگرال‌گیری از کسرهای جزئی به فرم ب) ممکن است به آسانی میسر نباشد، با توجه به این که فرمول‌های انتگرال مربوط به توابع معکوس مثلثاتی در این کتاب آورده نشده است، ما تنها انتگرال‌هایی به فرم ب) را بررسی می‌کنیم که مشتق عبارت  $x^2 + px + q$  یا به طور کامل در صورت باشد و یا قابلیت ایجاد شدن داشته باشد.

مثال ۱-۱۸

$$\int \frac{-3}{(x-1)^4} dx = -3 \frac{(x-1)^{-3}}{-3} + C \quad \blacksquare \quad \text{(الف)}$$

$$\int \frac{2}{3x+7} dx = \frac{2}{3} \ln|3x+7| + C \quad \blacksquare \quad \text{(ب)}$$

$$\int \frac{x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+9| + C \quad \blacksquare \quad \text{(ج)}$$

$$\int \frac{x+3}{x^2+6x+11} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{x^2+6x+11} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+6x+11| + C \quad \blacksquare \quad \text{(د)}$$

۱-۴-۲ دسته بندی توابع گویا

در یک تابع گویا همواره ممکن است یکی از ۳ حالت زیر رخ دهد:

(الف) درجه‌ی صورت بیشتر از مخرج باشد (مانند  $\frac{x^3}{x^2+1}$ )

(ب) درجه‌ی صورت مساوی درجه‌ی مخرج باشد (مانند  $\frac{x-1}{x+3}$ )

(ج) درجه‌ی صورت از مخرج کمتر باشد (مانند  $\frac{1}{x^2-3x+4}$ )

دقت کنیم که کسرهای جزئی در این تقسیم بندی در دسته‌ی ج قرار می‌گیرند.

در حالات الف) و ب) می‌توان با انجام یک تقسیم عبارت را به گونه‌ای نوشت که برابر

حاصل جمع یک چندجمله‌ای و یک تابع از نوع ج) باشد. در واقع اگر صورت آن تابع

گویا  $p(x)$  و مخرج آن  $q(x)$  باشد پس از انجام تقسیمی به صورت

$$\begin{array}{r|l} p(x) & q(x) \\ \vdots & r(x) \\ \hline & s(x) \end{array}$$

خارج قسمتی مانند  $r(x)$  و باقی‌مانده‌ای برابر  $s(x)$  به دست می‌آید که درجه‌ی  $s(x)$

همواره از درجه‌ی  $q(x)$  کمتر است. بنابراین تابع گویای مورد نظر را می‌توان به شکل

زیر نوشت:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{s(x)}{q(x)} \quad (*)$$

دقت کنیم که پس از انجام این تقسیم تابع گویای  $\frac{s(x)}{q(x)}$  از نوع حالت ج) است.

### تذکره ۸-۱

برای انتگرال گیری از توابع گویا که از نوع الف) و ب) هستند ابتدا با انجام عمل تقسیم آن را به شکل نمایش داده شده در رابطه ی (\*) تبدیل می کنیم.

### مثال ۱-۱۹

انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{x^3}{x^2+1} dx \quad \text{الف)} \quad \int \frac{x-1}{x+3} dx \quad \text{ب)}$$

حل)

الف) پس از انجام عمل تقسیم خارج قسمتی به صورت  $r(x) = x$  و باقیمانده ای به صورت  $s(x) = -x$  خواهیم داشت. بنابراین:

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x + \frac{-x}{x^2+1}$$

پس با انتگرال گیری از طرفین رابطه ی فوق داریم:

$$\int \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \int x dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C. \quad \blacksquare$$

ب) با انجام عمل تقسیم داریم:

$$\frac{x-1}{x+3} = 1 + \frac{-4}{x+3}$$

بنابراین:

$$\int \frac{x-1}{x+3} dx = \int \left(1 - \frac{4}{x+3}\right) dx = \int dx - 4 \int \frac{1}{x+3} dx = x - 4 \ln|x+3| + C. \quad \blacksquare$$

## ۱-۴-۳ تجزیه‌ی توابع گویا به کسرهای جزئی

هر کسر گویا را می‌توان به صورت مجموعی از کسرهای جزئی نوشت. بنابر آنچه که در بحث دسته‌بندی کسرهای گویا دیدیم، در حالتی که درجه‌ی صورت کسر مساوی یا بیش از درجه‌ی مخرج باشد، با انجام یک تقسیم جبری ساده، می‌توان آن را به صورت مجموعی از یک چندجمله‌ای و یک کسرگویا نوشت که در آن کسر گویا درجه‌ی مخرج از درجه‌ی صورت بیش‌تر است. پس بدیهی است که می‌توان تنها تجزیه کسرهای گویا را در حالتی که درجه‌ی مخرج از صورت بیشتر است بررسی نمود.

مراحل تجزیه‌ی کسر گویای  $\frac{p(x)}{q(x)}$ :

مرحله ۱: مخرج کسر (یعنی  $q(x)$ ) را تا جایی که امکان دارد تجزیه می‌کنیم.

مرحله ۲: پس از تجزیه‌ی مخرج کسر، دو نوع عامل ممکن است ظاهر شود:

- عامل خطی با تکرار  $k$ ، به صورت  $(ax+b)^k$ .

- عامل درجه دوم با تکرار  $k$ ، به صورت  $(ax^2+bx+c)^k$  با شرط  $b^2-4ac < 0$ ، که این شرط یعنی  $ax^2+bx+c$  تجزیه‌ناپذیر است.

مرحله ۳: اکنون برای عامل خطی  $(ax+b)^k$  از تجزیه‌ی  $k$  جمله‌ای زیراستفاده می‌کنیم:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

که در آن  $A_1, A_2, \dots, A_k$  اعداد ثابتی‌اند و باید محاسبه شوند.

همچنین برای عامل درجه دوم  $(ax^2+bx+c)^k$  تجزیه‌ی  $k$  جمله‌ای زیر را داریم:

$$\frac{E_1x+F_1}{ax^2+bx+c} + \frac{E_2x+F_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{E_kx+F_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

که در آن  $E_1, \dots, E_k$  و  $F_1, \dots, F_k$  اعداد ثابتی‌اند و باید آن‌ها را مشخص نماییم.

مثال ۱-۲۰ (یک عامل خطی مرتبه اول تکراری)

عبارت گویای  $\frac{x^2-6x+3}{(x-2)^3}$  را تجزیه نموده و انتگرال  $\int \frac{x^2-6x+3}{(x-2)^3} dx$  را حل کنید.

(حل)

همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم، مخرج کسر عامل خطی  $x-2$  با تکرار ۳ است. بنابراین دارای تجزیه‌ای به صورت عبارت زیر است:

$$\frac{x^2 - 6x + 3}{(x-2)^3} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} \quad (1-1)$$

برای محاسبه ثابت‌های  $A_1, A_2$  و  $A_3$ ، طرفین رابطه‌ی بالا را در  $(x-2)^3$  ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 3 &= A_1(x-2)^2 + A_2(x-2) + A_3 \\ &= A_1x^2 + (A_2 - 4A_1)x + (4A_1 - 2A_2 + A_3) \end{aligned}$$

با مقایسه‌ی ضرایب در رابطه‌ی فوق داریم:

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 - 4A_1 = -6 \\ 4A_1 - 2A_2 + A_3 = 0 \end{cases}$$

با حل دستگاه بالا داریم:

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = -2 \\ A_3 = -5 \end{cases}$$

بنابراین رابطه‌ی (1-1) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{x^2 - 6x + 3}{(x-2)^3} = \frac{1}{x-2} + \frac{-2}{(x-2)^2} + \frac{-5}{(x-2)^3}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 6x + 3}{(x-2)^3} dx &= \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{-2}{(x-2)^2} dx + \int \frac{-5}{(x-2)^3} dx \\ &= \int \frac{1}{x-2} dx - 2 \int (x-2)^{-2} dx - 5 \int (x-2)^{-3} dx \\ &= \ln|x-2| + \frac{2}{x-2} + \frac{5}{2(x-2)^2} + C. \blacksquare \end{aligned}$$

مثال ۱-۲۱ (دو عامل مجزای خطی مرتبه اول بدون تکرار)

عبارت‌گویای  $\frac{5x-10}{x^2-3x-4}$  را تجزیه کنید و حاصل انتگرال  $\int \frac{5x-10}{x^2-3x-4} dx$  را بیابید.

(حل)

$$\frac{5x-10}{x^2-3x+4} = \frac{5x-10}{(x-4)(x+1)}$$

بنابراین در مخرج کسر دو عامل خطی بدون تکرار ظاهر شده است، پس تجزیه‌ای بصورت زیر داریم:

$$\frac{5x-10}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1} \quad (2-1)$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در  $(x-4)(x+1)$  داریم:

$$5x-10 = A(x+1) + B(x-4)$$

رابطه‌ی بالا برای هر مقدار  $x$  برقرار است، با قرار دادن  $x = -1$  در رابطه‌ی فوق داریم:

$$5(-1)-10 = A(-1+1) + B(-1-4)$$

یعنی  $-5B = -15$  و بنابراین  $B = 3$ . همچنین با قرار دادن  $x = 4$  و  $B = 3$  در رابطه‌ی قبل داریم:

$$5(4)-10 = A(3+1) + 3(3-4)$$

یعنی  $5A - 3 = 5$  و لذا  $A = 2$ .

پس با قرار دادن مقادیر  $A = 2$  و  $B = 3$  در رابطه‌ی (2-1) خواهیم داشت:

$$\frac{5x-10}{x^2-3x-4} = \frac{5x-10}{(x-4)(x+1)} = \frac{2}{x-4} + \frac{3}{x+1}$$

بنابراین :

$$\int \frac{5x-10}{x^2-3x-4} dx = \int \left( \frac{2}{x-4} + \frac{3}{x+1} \right) dx = 2 \int \frac{1}{x-4} dx + 3 \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= 2 \ln|x-4| + 3 \ln|x+1| + C. \quad \blacksquare$$

مثال ۲۲-۱ (عامل خطی به همراه عامل درجه دوم)

کسرگویای  $\frac{1}{x^3+x}$  را به صورت مجموعی از کسرهای جزئی بنویسید و حاصل

انتگرال  $\int \frac{1}{x^3+x} dx$  را بیابید.

(حل)

با تجزیه‌ی مخرج کسر داریم:

$$x^3 + x = x(x^2 + 1)$$

بنابراین درمخرج عامل خطی  $x$  و عامل درجه دوم  $x^2 + 1$  که هر دو بدون تکرار هستند، وجود دارد. پس:

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1} \quad (3-1)$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی بالا در  $x^2 + x$  داریم:

$$1 = A(x^2 + 1) + (Ex + F)x = (A + E)x^2 + Fx + A$$

با مقایسه‌ی ضرایب در طرفین رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A + E = 0 \\ F = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

بنابراین در رابطه‌ی  $A = 1$  (3-1)،  $E = -1$  و  $F = 0$  و این رابطه به صورت زیرنوشته می شود:

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2 + 1}$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه‌ی فوق داریم:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3 + x} dx &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C. \blacksquare \end{aligned}$$

مثال ۱-۲۳ (عامل درجه دوم با تکرار)

حاصل انتگرال  $\int \frac{-3x^3 - x}{(x^2 + 1)^2} dx$  را بیابید.

(حل)

با توجه به این که مخرج کسر دارای عامل درجه دوم  $x^2 + 1$  با تکرار ۲ است، داریم:

$$\frac{-3x^3 - x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{E_1x + F_1}{x^2 + 1} + \frac{E_2x + F_2}{(x^2 + 1)^2} \quad (4-1)$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در  $(x^2 + 1)^2$  داریم:

$$\begin{aligned} -3x^3 - x &= (x^2 + 1)(E_1x + F_1) + E_2x + F_2 \\ &= E_1x^3 + F_1x^2 + (E_1 + E_2)x + (F_1 + F_2) \end{aligned}$$

با مقایسه‌ی ضرایب در طرفین تساوی بالا داریم:

$$F_2 = 0, E_2 = 2, F_1 = 0, E_1 = -3.$$

پس رابطه‌ی (۱-۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{-3x^3 - x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3x}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه‌ی بالا داریم:

$$\begin{aligned} \int \frac{-3x^3 - x}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{-3x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \frac{-3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int 2x(x^2 + 1)^{-2} dx \\ &= \frac{-3}{2} \ln(x^2 + 1) - (x^2 + 1)^{-1} + C. \blacksquare \end{aligned}$$

### تمرین‌های بخش ۱-۴



۱. کسرگویای  $\frac{x^4 + 7x^3 + 16x^2 + 11x}{x^2 + 6x + 10}$  را تبدیل به مجموعی از کسرهای جزئی نمایید.

۲. حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

الف)  $\int \frac{2x+1}{2x-1} dx$       ب)  $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$       ج)  $\int \frac{dx}{x^3 + 2x}$

د)  $\int \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^3 - x^2} dx$       ه)  $\int \frac{2x^2 - 10x + 4}{(x+1)(x-3)^2} dx$       و)  $\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 8}$

ز)  $\int \frac{e^x}{1 - e^{2x}} dx$       ح)  $\int \frac{x^0 + x^2 + 2}{x^3 - x} dx$       ط)  $\int \frac{3x^2 - 10}{x^2 - 4x + 4} dx$

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^x} \quad \text{د} \quad \int \frac{\sin x}{\cos x(1 + \cos^2 x)} dx \quad \text{ک} \quad \int \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^3} dx \quad \text{ی}$$

### ۱-۵-۱ انتگرال معین

در این بخش با اشاره‌ی کوتاهی به تعریف انتگرال معین، به سراغ ارائه یک تعبیر هندسی این مفهوم در حالات خاصی می‌رویم و سپس به بیان رابطه‌ی بین انتگرال معین و بنابراین و کاربردهایی از انتگرال معین می‌پردازیم.

### ۱-۵-۱-۱ مجموع ریمان

فرض کنیم تابع  $f$  روی بازه‌ی بسته  $[a, b]$  تعریف شده است و  $\Delta$  افرازی از این بازه به صورت زیر باشد:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

اگر  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  اندازه‌ی  $i$  امین زیر بازه در افراز فوق باشد، آنگاه مجموع

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \quad \text{(که در آن } c_i \text{ نقطه‌ی دلخواهی متعلق به بازه‌ی } [x_{i-1}, x_i] \text{ است) مجموع}$$

ریمان تابع  $f$  برای افراز  $\Delta$  نامیده می‌شود.

اندازه‌ی بزرگ‌ترین زیر بازه در افراز  $\Delta$  را نرم این افراز گوئیم و آن را با نماد  $\|\Delta\|$

نمایش می‌دهیم. اگر نرم افراز  $\Delta$  به سمت صفر میل کند، پس بایستی تعداد زیر بازه‌ها

یعنی  $n$  به سمت بی‌نهایت میل کند. یعنی  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  نتیجه خواهد داد که  $n \rightarrow +\infty$ .

### ۱-۵-۲ تعریف انتگرال معین

تابع  $f$  تعریف شده بر بازه‌ی بسته  $[a, b]$  را انتگرال پذیر نامیم اگر  $\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$

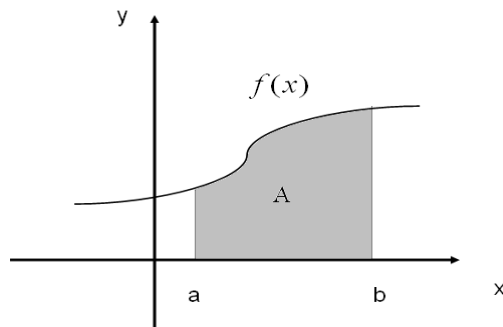
موجود باشد و مقدار این حد را با  $\int_a^b f(x) dx$  نمایش داده و آنرا انتگرال معین

تابع  $f$  از  $a$  به  $b$  نامیم.

## ۳-۵-۱ تعبیر انتگرال معین به عنوان مساحت

می توان نشان داد که اگر تابع  $f$  روی بازه ی بسته  $[a, b]$  پیوسته باشد آنگاه بر این بازه انتگرال پذیر است. اکنون برای یک تابع پیوسته در بازه ی  $[a, b]$  به بیان تعبیر هندسی انتگرال معین می پردازیم:

حالت الف) فرض کنیم مانند شکل زیر نمودار تابع  $f$  بر بازه ی  $[a, b]$  در قسمت بالای محور  $x$  ها قرار گیرد: (یعنی بر این بازه داشته باشیم  $f(x) \geq 0$ )



حال اگر مساحت ناحیه مشخص شده ی  $A$  را با  $S(A)$  نمایش دهیم، آنگاه انتگرال معین تابع  $f$  از  $a$  تا  $b$  را می توان بر حسب این مساحت بیان نمود:

$$\int_a^b f(x) dx = S(A)$$

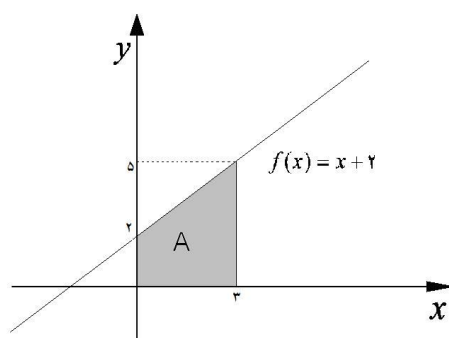
## مثال ۱-۲۴

اگر  $f(x) = x + 2$  با رسم شکل و به کمک مساحت مقدار  $\int_0^3 f(x) dx$  را بیابید.

(حل)

با توجه به این که تابع مورد نظر در بازه ی  $[0, 3]$  در قسمت بالایی محور  $x$  ها قرار گرفته است، داریم:

### انتگرال ۳۱



$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x + 2) dx = S(A)$$

اما همان طور که ملاحظه می شود، ناحیه ی  $A$  به شکل یک ذوزنقه است، با توجه به این که مساحت ذوزنقه برابر با نصف حاصل ضرب مجموع قاعده ها در ارتفاع ذوزنقه

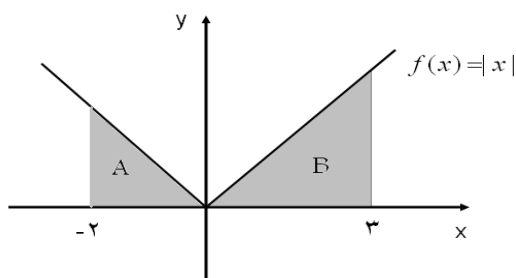
$$\int_0^3 f(x) dx = \frac{21}{2} \text{ و بنابراین } S(A) = \frac{1}{2}(2+5)(3) = \frac{21}{2} \text{ داریم} \quad \blacksquare$$

### مثال ۲۵-۱

مقدار انتگرال  $\int_{-2}^3 |x| dx$  را بیابید.

(حل)

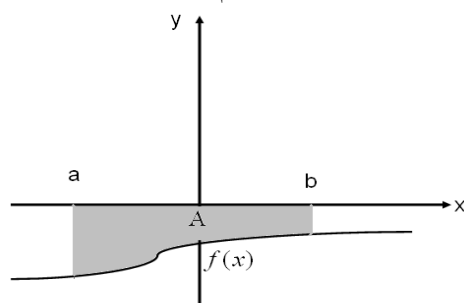
نمودار تابع  $f(x) = |x|$  در شکل زیر دیده می شود:



بنابراین:

$$\int_{-2}^3 |x| dx = S(A) + S(B) = \frac{1}{2}(2 \times 2) + \frac{1}{2}(3 \times 3) = \frac{13}{2} . \blacksquare$$

حالت ب) اگرمانند شکل زیر نمودار تابع  $f$  بر بازه‌ی  $[a, b]$  در زیر محور  $x$  ها واقع شود: (یعنی براین بازه داشته باشیم  $f(x) \leq 0$ )



آنگاه انتگرال معین تابع  $f$  از  $a$  تا  $b$  برابر با قرینه‌ی مساحت ناحیه‌ی  $A$  خواهد بود:

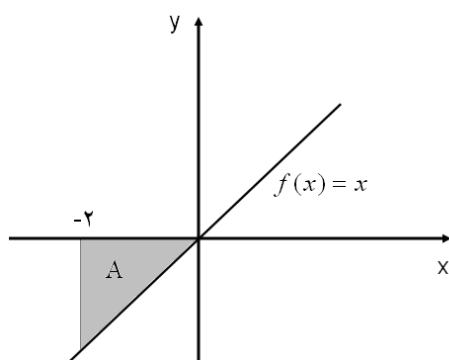
$$\int_a^b f(x) dx = -S(A)$$

### مثال ۱-۲۶

مقدار انتگرال  $\int_{-2}^0 x dx$  را با رسم شکل بیابید.

(حل)

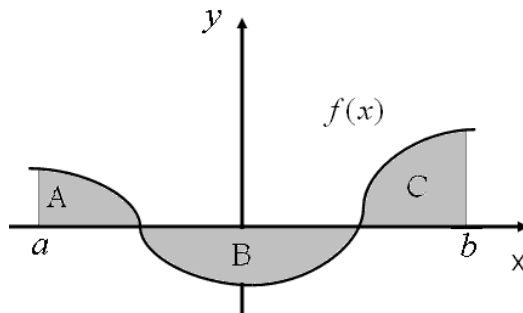
با توجه به نمودار تابع  $f(x) = x$  داریم:



### انتگرال ۳۳

$$\int_{-2}^0 x dx = -S(A) = -\frac{1}{2}(2 \times 2) = -2. \blacksquare$$

حالت ج) اگر همانند شکل زیر، نمودار تابع  $f$  دارای این خاصیت باشد که در بازه  $[a, b]$  قسمتی از نمودار در بالای محور  $x$  ها و قسمتی در زیر محور  $x$  ها باشد:



در این حالت انتگرال تابع  $f$  از  $a$  تا  $b$  برابر است با :

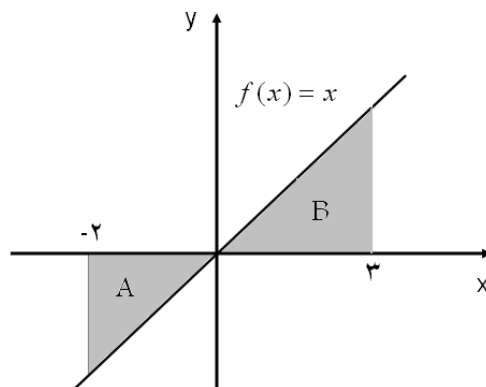
$$\int_a^b f(x) dx = S(A) + S(C) - S(B)$$

### مثال ۱-۲۷

با رسم نمودار تابع  $f(x) = x$ ، مقدار انتگرال  $\int_{-2}^3 f(x) dx$  را بیابید.

(حل)

با توجه به نمودار تابع  $f(x) = x$  که در زیر رسم شده است، داریم:



$$\int_{-2}^3 x dx = S(B) - S(A) = \frac{1}{2}(3 \times 3) - \frac{1}{2}(2 \times 2) = \frac{5}{2}. \blacksquare$$

### تذکره ۹-۱

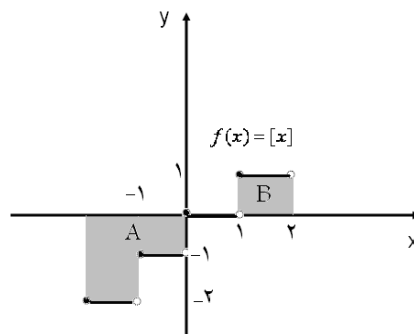
می‌توان نشان داد که اگر تابع  $f$  در بازه‌ی  $[a, b]$  کران‌دار بوده و در تعداد متناهی نقطه ناپیوسته باشد، آنگاه انتگرال‌پذیر است.

### مثال ۲۸-۱

حاصل انتگرال معین  $\int_{-2}^2 [x] dx$  را بیابید.

(حل)

با توجه به نمودار تابع  $f(x) = [x]$  در بازه‌ی  $[-2, 2]$ ، که در شکل زیر رسم شده است و به کمک مساحت‌های مشخص شده داریم:



$$\int_{-2}^2 [x] dx = S(B) - S(A) = 1 - 3 = -2. \blacksquare$$

### ۱-۵-۴ رابطه‌ی انتگرال‌های معین و نامعین

فرض کنید بخواهیم مقدار انتگرال معین  $\int_1^2 (x^2 + 1) dx$  را به روش مساحت‌ها به دست آوریم. اگر نمودار این تابع را در بازه‌ی مورد نظر رسم کنیم، خواهیم دید که مساحت

محصور به نمودار تابع و محور  $x$  ها و خطوط  $x=1$  و  $x=2$  دارای شکل هندسی شناخته شده ای نیست، پس روش مساحت ها برای محاسبه ی انتگرال معین کارایی مناسبی نخواهد داشت! بنابراین طبیعی است که به دنبال روشی مناسب برای حل این مشکل باشیم. قضیه ی زیر که از جمله شاهکارهای ریاضیات بوده و پیونددهنده ی مفاهیم انتگرال معین و نامعین است، ابزار مناسبی برای محاسبه ی انتگرال های معین فراهم می کند:

### ۱-۵-۵ قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

اگر تابع  $f$  بر بازه ی  $[a, b]$  پیوسته باشد و  $\int f(x)dx = F(x) + C$  آنگاه:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

قرار داد: به جای نوشتن  $F(b) - F(a)$  معمولاً از نماد  $\left[ F(x) \right]_a^b$  استفاده خواهیم کرد.

در مثال بعد با چگونگی استفاده از قضیه ی بالا در حل انتگرال های معین آشنا خواهیم شد.

### مثال ۱-۲۹

حاصل انتگرال های معین زیر را بیابید.

$$\int_1^9 \sqrt{x} dx \quad (\text{د}) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \quad (\text{ج}) \quad \int_0^2 (9 - x^2) dx \quad (\text{ب}) \quad \int_0^3 (x + 2) dx \quad (\text{الف})$$

(حل)

الف) با توجه به این که  $\int (x + 2) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C$  داریم:

$$\int_0^3 (x + 2) dx = \left[ \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^3 = \left( \frac{3^2}{2} + 2(3) \right) - \left( \frac{0^2}{2} + 2(0) \right) = \frac{21}{2} - 0 = \frac{21}{2} \quad \blacksquare$$

ب) با توجه به این که  $\int (9 - x^2) dx = 9x - \frac{x^3}{3} + C$  داریم:

$$\int_0^2 (9 - x^2) dx = \left[ 9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left( 18 - \frac{8}{3} \right) - (0) = \frac{46}{3} . \blacksquare$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[ \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 . \blacksquare \quad (\text{ج})$$

$$\int_1^9 \sqrt{x} dx = \int_1^9 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_1^9 = \frac{2}{3} (9^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{2}{3} (27 - 1) = \frac{52}{3} . \blacksquare \quad (\text{د})$$

### ۱-۵-۶ خواص انتگرال معین

اکنون به بیان چند خاصیت اصلی درمورد انتگرال معین می‌پردازیم که درحل برخی مسائل مربوط به انتگرال معین کارایی دارد.

(الف) اگر  $a$  نقطه‌ای در دامنه‌ی تابع  $f$  باشد، داریم:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

(ب) اگر  $f$  بر بازه‌ی  $[a, b]$  انتگرال‌پذیر باشد آنگاه:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

(ج) مشابه انتگرال نامعین، ضرب عددی از انتگرال معین عبور می‌کند:

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

(د) قاعده‌ی جمع و تفریق مشابه انتگرال نامعین، درمورد انتگرال معین نیز برقرار است:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

(ه) اگر تابع  $f$  در بازه‌ی بسته‌ای شامل سه نقطه‌ی  $a, b$  و  $c$  انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه داریم:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

و) اگر  $f$  تابعی انتگرال پذیر بر بازه  $[a, b]$  باشد که برای هر  $x$  در این بازه  $f(x) \geq 0$  باشد، آنگاه حاصل انتگرال معین  $\int_a^b f(x)dx$  عددی نامنفی است.

ز) اگر تابع  $f$  در بازه  $[a, b]$  کراندار و در این بازه دارای تعداد متناهی نقطه‌ی ناپیوستگی باشد، آنگاه بر این بازه انتگرال پذیر است.

ح) اگر  $f(x)$  تابعی فرد باشد، آنگاه :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

ط) اگر  $f(x)$  تابعی زوج باشد، آنگاه :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

### مثال ۱-۳۰

اگر  $\int_0^3 f(x)dx = 10$  و  $\int_3^5 f(x)dx = 3$  آنگاه داریم:

الف)  $\int_0^5 f(x)dx = 13$       ب)  $\int_0^5 f(x)dx = 0$

ج)  $\int_0^5 f(x)dx = -13$       د)  $\int_0^3 5f(x)dx = 50$

ه)  $\int_0^5 3f(x)dx = 39$

### مثال ۱-۳۱

اگر  $f(x) = \begin{cases} 2x & , x \leq 1 \\ 2 & , x > 1 \end{cases}$  آنگاه داریم:

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 2x = x^2 \Big|_{-2}^0 = 0^2 - (-2)^2 = -4. \quad \blacksquare \quad \text{(الف)}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_{-2}^1 2x dx + \int_1^2 2x dx = x^2 \Big|_{-2}^1 + 2x \Big|_1^2 = -3 + 2 = -1. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad \text{(ب)}$$

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 2x dx = 2x \Big|_1^2 = 10. \quad \blacksquare \quad \text{(ج)}$$

(د) با توجه به قسمت‌های (ب) و (ج) داریم:

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = -3 + 10 = 7. \quad \blacksquare$$

#### مثال ۱-۳۲

حاصل انتگرال معین  $\int_1^e \ln x dx$  را بیابید.

(حل)

با توجه به مثال ۱-۱۵، ملاحظه می‌کنیم که  $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$  پس:

$$\int_1^e \ln x dx = x \ln x - x \Big|_1^e = (e \ln e - e) - (\ln 1 - 1) = 1. \quad \blacksquare$$

#### مثال ۱-۳۳

حاصل انتگرال‌های معین  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$  و  $\int_{-10}^{10} x|x| dx$  را بیابید.

(حل)

با توجه به این که  $\cos x$  تابعی زوج است داریم:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(1-0) = 2$$

و همچنین بنا به فرد بودن تابع  $f(x) = x|x|$  داریم  $\int_{-1}^1 x|x| dx = 0$  ■

### تمرین‌های بخش ۱-۵

۱. با رسم شکل در هر قسمت و به کمک مساحت محدود به نمودار و محور  $x$  ها حاصل انتگرال معین داده شده را بیابید.

الف)  $\int_{-2}^3 (2x-2) dx$  ب)  $\int_3^7 \frac{1}{x} dx$  ج)  $\int_0^2 |x-1| dx$  د)  $\int_{-1}^1 [2x] dx$

۲. انتگرال‌های معین داده شده را حل کنید.

الف)  $\int_0^4 (x^2 - 3x + 4) dx$  ب)  $\int_{-1}^2 x(1-x^2) dx$  ج)  $\int_{-3}^3 x e^{x^2} dx$

د)  $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx$  ه)  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$  و)  $\int_3^8 x^2 \sqrt{1+x} dx$

ز)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2} dx$  ح)  $\int_0^1 \frac{e^x}{2-e^x} dx$  ط)  $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(x+1)} dx$

ی)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$  ک)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta$  ل)  $\int_{-1}^1 x \ln(x^2+1) dx$

۳. اگر  $f(x) = \begin{cases} 2 & , x > 1 \\ x & , -1 \leq x \leq 1 \\ -2 & , x < -1 \end{cases}$  حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

الف)  $\int_2^3 f(x) dx$  ب)  $\int_0^2 f(x) dx$  ج)  $\int_0^{-1} f(x) dx$

$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} 2f(x)dx \quad (ز)$$

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x)dx \quad (ه)$$

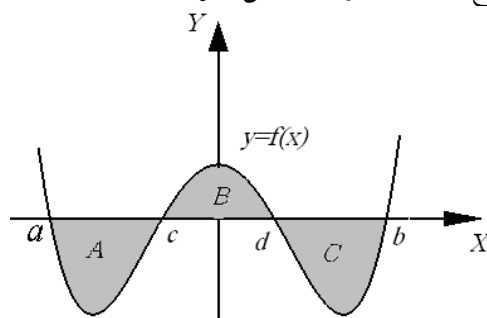
$$\int_{-2}^{\frac{5}{2}} f(x)dx \quad (د)$$

### ۱-۶ کاربرد انتگرال معین

در این قسمت به بررسی کاربردهایی از انتگرال معین از جمله تعیین مساحت محدود به نمودار تابع داده شده  $f$  و محور  $x$  ها در یک بازه دلخواه  $[a, b]$  و همچنین تعیین مساحت محصور شده به نمودار دو تابع داده شده در یک بازه دلخواه خواهیم پرداخت.

#### ۱-۶-۱ مساحت محدود به منحنی و محور $x$ ها در یک بازه

فرض کنیم نمودار تابع  $f(x)$  به صورت شکل زیر باشد:



همان طور که در قسمت قبل بیان شد:

$$S(C) = -\int_d^b f(x)dx \quad \text{و} \quad S(B) = \int_c^d f(x)dx \quad , \quad S(A) = -\int_a^c f(x)dx$$

بنابراین مساحت کل ناحیه محدود شده به نمودار تابع  $f(x)$  و محور  $x$  ها در بازه  $[a, b]$  برابر است با:

$$S(\text{کل}) = S(A) + S(B) + S(C) = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx - \int_d^b f(x)dx$$

البته می توان هر سه انتگرال موجود در سمت راست آخرین تساوی قبل را در قالب یک انتگرال زیرنوشت:

$$S \text{ (ناحیه محدود)} = \int_a^b |f(x)| dx$$

### ۱-۶-۲ تعریف

اگر تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  (بجز در تعداد متناهی نقطه) پیوسته و کراندار باشد، آنگاه مساحت کل ناحیه محدود به نمودار تابع و محورها در بازه  $[a, b]$  برابر است با:

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

### تذکره ۱-۱۰

اگر در هنگام محاسبه مساحت محدود به نمودار تابع  $f$  و محور  $x$  ها در بازه  $[a, b]$ ، بتوان نمودار تابع مورد نظر را رسم نمود و قسمت هایی که نمودار در قسمت پایین و بالای محور  $x$  ها قرار گرفته است را مشخص کرد، محاسبه مساحت کل به راحتی امکان پذیر است. در غیر این صورت ابتدا تابع  $f(x)$  را در بازه  $[a, b]$  تعیین علامت خواهیم کرد تا بازه هایی که این تابع دارای مقداری مثبت و یا منفی است مشخص گردد.

### مثال ۱-۳۴

مساحت محدود به نمودار تابع  $f(x) = 1 - x^2$  و محور  $x$  ها در بازه  $[0, 2]$  را بیابید.

(حل)

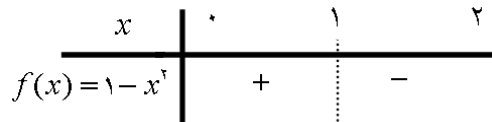
با توجه به تعریف داریم:

$$S \text{ (ناحیه محدود)} = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f(x) dx$$

حال ابتدا به تعیین علامت تابع  $f(x) = 1 - x^2$  در بازه  $[0, 2]$  می پردازیم:  
در آغاز با حل معادله  $f(x) = 0$  نقاط برخورد نمودار و محور طول ها را مشخص می کنیم.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

از بین دو ریشه‌ی  $x=1$  و  $x=-1$  فقط ریشه‌ی اولی در بازه‌ی  $(0, 2)$  قرار دارد. بارسم جدول تعیین علامت در این بازه داریم:



بنابراین می‌بینیم که در بازه‌ی  $[0, 1]$  تابع  $f(x)$  مثبت و در بازه‌ی  $[1, 2]$  منفی است پس:

$$\begin{aligned} S(\text{کل}) &= \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 (1 - x^2) dx - \int_1^2 (1 - x^2) dx = \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 - \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = 2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

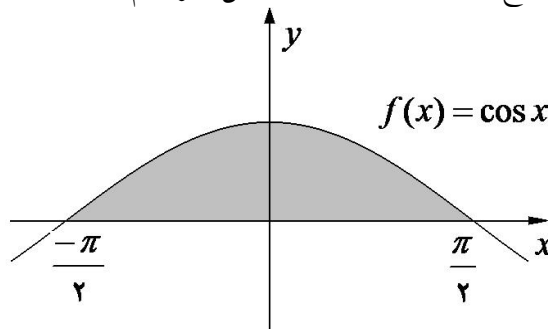
#### مثال ۱-۳۵

مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع  $f(x) = \cos x$  و محور  $x$  ها را در بازه‌ی

$$\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ محاسبه کنید.}$$

(حل)

با توجه به نمودار تابع  $f(x) = \cos x$  که در شکل زیر رسم شده است، داریم:



$$S(\text{ناحیه محدود}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{-\pi}{2} = 2. \quad \blacksquare$$

مثال ۱-۳۶

مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع  $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$ ، محور  $x$  ها را در بازه  $[-1, 1]$  بیابید.

(حل)

بنا به تعریف داریم:

$$S(\text{ناحیه محدود}) = \int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |-x^3 + x^2 + 2x| dx$$

با حل معادله  $-x^3 + x^2 + 2x = 0$  داریم:  $x = 0$ ،  $x = -1$  و  $x = \frac{3}{2}$ .

از بین این سه ریشه تنها نقطه  $x = 0$  در بازه  $(-1, 1)$  قرار دارد. بنابراین با تشکیل جدول تعیین علامت در بازه  $(-1, 1)$  به صورت زیر داریم:

|                   |      |     |     |
|-------------------|------|-----|-----|
| $x$               | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $-x^3 + x^2 + 2x$ |      | $-$ | $+$ |

بنابراین :

$$\begin{aligned} S(\text{ناحیه محدود}) &= \int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^1 |f(x)| dx \\ &= -\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$S(\text{ناحیه محدود}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{-\pi}{2} = 2. \quad \blacksquare$$

۱-۶-۳ مساحت ناحیه محدود به نمودار دو تابع

برای دو تابع پیوسته  $f(x)$  و  $g(x)$  بر بازه  $[a, b]$ ، اگر  $A$  ناحیه محدود بین نمودار

آن‌ها و خطوط  $x=a$  و  $x=b$  باشد، آنگاه مساحت ناحیه مورد نظر برابر است با :

$$S(A) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

### مثال ۱-۳۷

مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای توابع  $f(x) = x^3$  و  $g(x) = x^2 - x$  را در بازه  $[0, 1]$  بیابید.

(حل)

فرض کنیم که  $A$  مساحت ناحیه‌ی مورد نظر باشد، بنابراین:

$$S(A) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 |x^3 - x^2 + x| dx$$

اکنون عبارت داخل قدر مطلق در انتگرال فوق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^3 - x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x + 1) = 0$$

تنها جوابی که برای معادله‌ی فوق حاصل می‌شود برابر  $x=0$  است و این از لحاظ هندسی به این معناست که نمودارهای  $f$  و  $g$  تنها یک مرتبه در نقطه‌ی  $x=0$  به طول یکدیگر را قطع می‌کنند. با رسم جدول تعیین علامت داریم:

| $x$             | ۰ | ۱ |
|-----------------|---|---|
| $x^3 - x^2 + x$ |   | + |

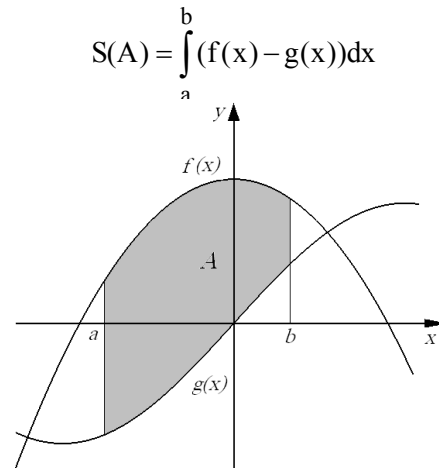
بنابراین برای هر  $x$  در بازه‌ی  $[0, 1]$  داریم  $|x^3 - x^2 + x| = x^3 - x^2 + x$

پس :

$$\begin{aligned} S(A) &= \int_0^1 |x^3 - x^2 + x| dx = \int_0^1 (x^3 - x^2 + x) dx \\ &= \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \bigg|_0^1 = \frac{5}{12} . \blacksquare \end{aligned}$$

### تذکره ۱-۱۱

اگر (همانند شکل رسم شده در زیر) نمودار تابع  $f(x)$  در بازه  $[a, b]$  بالاتر از نمودار تابع  $g(x)$  قرار می‌گیرد، آنگاه:



### مثال ۱-۳۸

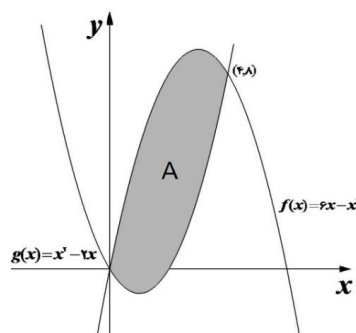
مساحت ناحیه محدود به نمودار توابع  $f(x) = 6x - x^2$  و  $g(x) = x^2 - 2x$  را بیابید.

(حل)

دقت کنیم که در این مثال بازه‌ی انتگرال‌گیری به‌طور صریح داده نشده است، در اینجا با

حل معادله‌ی  $f(x) = g(x)$ ، داریم  $x = 0$  و  $x = 4$ .

نمودار توابع  $f$  و  $g$  که هر دو به‌صورت سهمی هستند و در شکل زیر دیده می‌شوند:



همان‌طور که در شکل فوق دیده می‌شود، ناحیه‌ی  $A$  به‌گونه‌ای است که از بالا محدود

به تابع  $f$  و از پایین محدود به تابع  $g$  است و این دو تابع در دو نقطه با طول‌های  $x=0$  و  $x=4$  یکدیگر را قطع می‌کنند. بنابراین:

$$\begin{aligned} S(A) &= \int_0^4 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^4 (6x - x^2 - x^2 + 2x) dx \\ &= \int_0^4 (8x - 2x^2) dx = \left( 4x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{64}{3}. \blacksquare \end{aligned}$$

### مثال ۱-۳۹

مساحت ناحیه‌ی محدود بین نمودارهای  $y=x^2$ ،  $y=2x$  و  $y=x$  را محاسبه کنید.

(حل)

برای مشخص شدن بازه‌های انتگرال‌گیری ابتدا محل برخورد این سه منحنی را مشخص می‌کنیم.

مختصات نقاط تلاقی این سه منحنی از حل سه دستگاه زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = x \\ y = 2x \end{cases} \quad (3)$$

در مورد دستگاه (۱) داریم:

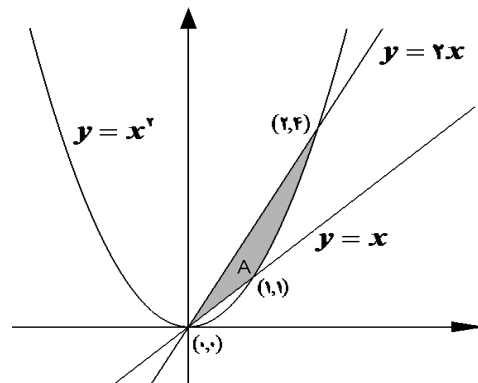
$$x^2 = 2x \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=2 \Rightarrow y=4 \end{cases}$$

پس دو نقطه‌ی تلاقی  $(0,0)$  و  $(2,4)$  حاصل گردید. در مورد دستگاه (۲) داریم:

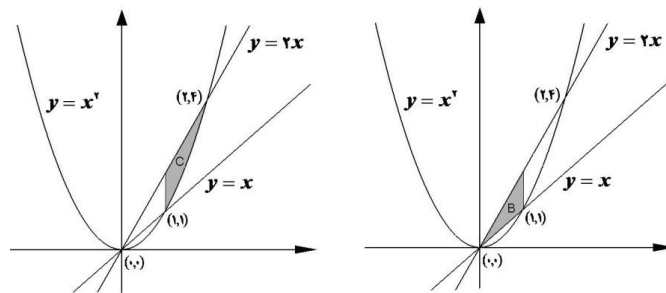
$$x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=1 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

در این مورد نیز نقاط  $(0,0)$  و  $(1,1)$  به دست می‌آیند و همچنین با حل دستگاه (۳) نقطه‌ی  $(0,0)$  حاصل می‌شود.

نمودار این سه منحنی و محل تلاقی آن‌ها در شکل بعد رسم شده است.



همان‌طور که در شکل فوق ملاحظه می‌کنید، ناحیه‌ی A از بالا به نمودار  $y = 2x$  و از پایین به دو نمودار  $y = x$  و  $y = x^2$  محدود شده است. پس مساحت ناحیه A را می‌توان به صورت مجموع مساحت نواحی B و C که در نمودارهای زیر دیده می‌شود، در نظر گرفت:



پس:

$$\begin{aligned}
 S(A) &= S(B) + S(C) \\
 &= \int_0^1 (2x - x) dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \left( \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) + \left( \left( 2^2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left( 1^2 - \frac{1^3}{3} \right) \right) = \frac{7}{6}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

تمرین‌های بخش ۱-۶ 

۱. در هر قسمت مساحت محدود به نمودار تابع داده شده‌ی f و محور x ها را بیابید.

الف)  $f(x) = x^3 - 4x$  در بازه  $[-2, 2]$

ب)  $f(x) = \sqrt{4-x}$  در بازه  $[0, 4]$

ج)  $f(x) = e^x - e^{-x}$  در بازه  $[-1, 1]$

د)  $f(x) = (2x - 3)^3$  در بازه  $[0, 1]$

۲. در هر قسمت مساحت ناحیه محدود بین دو تابع داده شده را بیابید.

الف)  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = x$  در بازه  $[-1, 1]$

ب)  $f(x) = x^3$  و  $g(x) = x$  در بازه  $[-1, 1]$

ج)  $f(x) = x^3$  و  $g(x) = x^2$

د)  $f(x) = \frac{x}{2} + 2$  و  $g(x) = x^2$

ه)  $f(x) = 7 - 2x$  و  $g(x) = x + 1$  و  $h(x) = \frac{2-x}{2}$

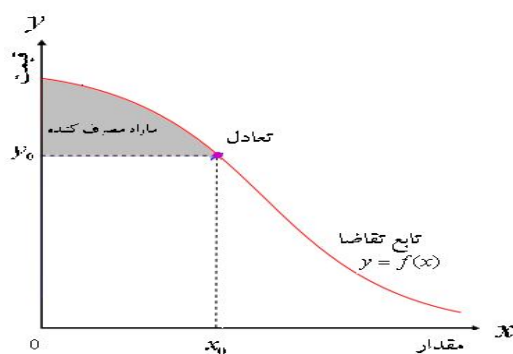
### ۷-۱ کاربردهای اقتصادی انتگرال معین

تا به امروزه برای بحث انتگرال گیری درمقایسه با مشتق گیری، کاربردهای کمتری در اقتصاد پیدا شده است. در اینجا به ذکر دو نمونه از کاربرد انتگرال معین در علم اقتصاد می پردازیم.

#### ۷-۱-۱ مازاد مصرف کننده

تابع تقاضا بیان کننده ی مقادیری از کالا است که در قیمت های مختلف خریداری می شود. علم اقتصاد بیان می کند که اگر تعادل بازار در نقطه ی  $(x_0, y_0)$  برقرار شود (یعنی قیمت کالایی برابر  $y_0$  و تقاضای متناظر با آن  $x_0$  باشد) آنگاه مصرف کنندگانی که مایل به پرداخت قیمتی بیش از قیمت بازار باشند، سود بیشتری خواهند برد. تحت مفروضات اقتصادی، میزان سود مصرف کننده به وسیله ی ناحیه ی محدود به زیر نمودار تابع تقاضا و بالای خط افقی  $y = y_0$  نمایش داده می شود. مساحت ناحیه ی مورد نظر را با C.S نمایش داده و آن را مازاد مصرف کننده تعریف می کنیم. به لحاظ اقتصادی مازاد مصرف کننده چیزی نیست بجز اختلاف بین آنچه که مصرف کنندگان حاضر به پرداخت آن هستند، با آنچه که واقعاً می پردازند.

## انتگرال ۴۹



با توجه به شکل بالا داریم:

$$C.S = \int_0^{x_0} f(x) dx - x_0 y_0$$

مساحت زیر منحنی از  $x = 0$  تا  $x = x_0$

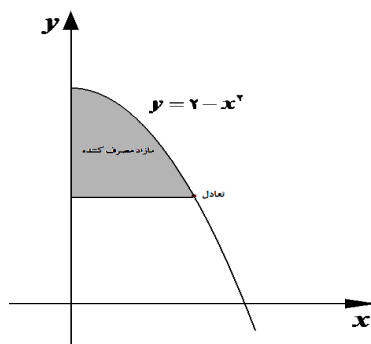
مساحت ناحیه مستطیلی زیر  
ناحیه میزان سود مصرف کننده

## مثال ۴۰-۱

اگر تابع تقاضای بصورت  $f(x) = 2 - x^2$  باشد، مازاد مصرف کننده را در  $x_0 = 1$  بیابید.

(حل)

نمودار این تابع تقاضا در شکل زیر رسم شده است. مساحت ناحیه‌ی مشخص شده در شکل زیر برابر با مازاد مصرف کننده است.

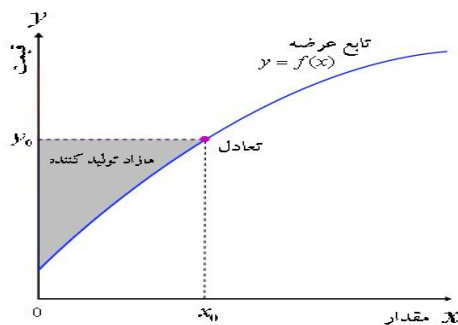


$$C.S = \int_0^1 f(x)dx - (1 \times 1) = \int_0^1 (2 - x^2)dx - 1 = \left[ 2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - 1 = \frac{2}{3} \quad \blacksquare$$

#### ۱-۷-۲ مازاد تولیدکننده

تابع عرضه، نشانگر مقدارهای مختلف از کالاهایی است که با قیمت‌های متفاوتی عرضه می‌شوند. اگر تعادل بازار در نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  ایجاد گردد، آنگاه تولیدکننده‌هایی که مایل به عرضه‌ی کالا زیر قیمت بازار (یعنی  $y_0$ ) باشند، سود می‌برند. کل سود ایجاد شده برای تولیدکننده را مازاد تولیدکننده نامیم و با P.S نمایش می‌دهیم. تحت مفروضات خاص اقتصادی این مقدار برابر با مساحت بالای نمودار تابع عرضه و زیر خط افقی  $y = y_0$  است. با توجه به نمودار زیر، مازاد مصرف‌کننده یا همان P.S برابر است با مساحت مستطیلی با ابعاد  $x_0$  و  $y_0$ ، منهای مساحت سطح زیر منحنی عرضه

$$\text{از } x=0 \text{ تا } x=x_0 \text{ یعنی } P.S = x_0 y_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx$$



#### مثال ۱-۴۱

اگر تابع عرضه‌ی کالایی برابر  $y = x^3 + 2$  باشد، آنگاه مازاد تولیدکننده را به ازای  $y_0 = 10$  بیابید.

(حل)

با قرار دادن مقدار  $y_0 = 10$  در  $y = x^3 + 2$  داریم  $x_0 = 2$ . بنابراین:

$$P.S = x_0 y_0 - \int_0^{x_0} f(x) dx = 20 - \int_0^2 (x^2 + 1) dx = 20 - \left( \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 = 14. \quad \blacksquare$$

### تمرین‌های بخش ۱-۷

۱. توابع تقاضا و عرضه‌ی کالایی به‌ترتیب برابر با  $f(x) = 16 - x^2$  و  $g(x) = 4 + x$  است. مازاد تولید کننده و مصرف کننده را بیابید.  
(راهنمایی: نقطه تعادل از برابر قرار دادن تابع عرضه با تقاضا حاصل می‌شود)
۲. اگر تابع تقاضا برای یک مصرف‌کننده به‌صورت  $f(x) = 81000 - x^2$  باشد، آنگاه مازاد مصرف‌کننده را برای  $x_0 = 90$  بیابید.
۳. اگر تابع عرضه برای کالایی به‌صورت  $y = \sqrt{2x + 3}$  باشد آنگاه مازاد تولیدکننده را برای  $y_0 = \sqrt{15}$  بیابید.

### ۸-۱ آشنایی با معادلات دیفرانسیل

ممکن است دربرخی از مسائل مطرح شده در علوم اقتصاد و مدیریت، با یک معادله شامل مشتقات یک تابع مجهول، مواجه گردیم. چنین معادله‌ای را یک معادله‌ی دیفرانسیل نامیم. هدف ما در این قسمت آشنایی مختصری با مفهوم معادلات دیفرانسیل است.

#### ۱-۸-۱ تعریف

معادله‌ی به‌صورت

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

را که در آن  $y$  تابعی مجهول بر حسب  $x$  است، معادله دیفرانسیل مرتبه  $n$  نامیم.

دقت کنیم که منظور از  $y^{(n)}$  در تعریف قبل، مشتق  $n$ ام  $y$  نسبت به  $x$  است و مرتبه‌ی یک معادله‌ی دیفرانسیل در واقع برابر با بالاترین مشتق موجود در معادله است.

### مثال ۴۲-۱

هر یک از معادلات

$$\begin{aligned} 2y'' + y' + 3y &= \cos x \\ \left(\frac{d^5 y}{dx^5}\right)^2 + 2 \frac{d^3 y}{dx^3} - 3xy \frac{dy}{dx} + x &= 0 \\ 3xy^{(v)} + xy^{(i)} - 2xyy' &= 1 \end{aligned}$$

به ترتیب معادلات دیفرانسیل از مرتبه‌های ۲، ۵ و ۷ هستند. ■

### تعریف ۲-۸-۱

معادله دیفرانسیل

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

را در نظر گیریم. هر تابع  $y = f(x)$  که در معادله‌ی فوق صدق کند را یک جواب آن معادله دیفرانسیل نامیم. مجموعه‌ی تمام جواب‌های یک معادله دیفرانسیل را، جواب عمومی آن معادله نامیم.

### مثال ۴۳-۱

تحقیق کنید که تابع  $y = \cos x$  جوابی از معادله‌ی دیفرانسیل  $y'' + y = 0$  است.

(حل)

$$y' = -\sin x \quad \text{و} \quad y'' = -\cos x$$

و بنابراین:

$$y'' + y = -\cos x + \cos x = 0. \quad \blacksquare$$

### مثال ۴۴-۱

نشان دهید که برای هر عدد حقیقی و ثابت  $c$  تابع  $y = e^{-x} + ce^{-2x}$  جوابی از معادله‌ی دیفرانسیل  $y' + 2y = e^{-x}$  است.

$$y' = -e^{-x} - 2ce^{-2x}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} y' + 2y &= -e^{-x} - 2ce^{-2x} + 2(e^{-x} + ce^{-2x}) \\ &= -e^{-x} - 2ce^{-2x} + 2e^{-x} + 2ce^{-2x} = e^{-x}. \blacksquare \end{aligned}$$

### ۳-۸-۱ معادله دیفرانسیل جدایی پذیر

ساده ترین نوع معادله ی دیفرانسیل مرتبه اول به صورت زیر است که با انتگرال گیری از طرفین آن قابل حل است:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{یا} \quad y' = f(x)$$

### مثال ۱-۴۵

معادله دیفرانسیل  $2y' + \sin x = 1$  را با شرط  $y(0) = 1$  حل کنید.

(حل)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{\sin x}{2} \quad \text{یا} \quad y' = \frac{1}{2} - \frac{\sin x}{2}$$

بنابراین:

$$dy = \left( \frac{1}{2} - \frac{\sin x}{2} \right) dx$$

اکنون با انتگرال گیری از طرفین رابطه ی فوق داریم:

$$\int dy = \int \left( \frac{1}{2} - \frac{\sin x}{2} \right) dx$$

پس:

$$y = \int \left( \frac{1}{2} - \frac{\sin x}{2} \right) dx = \frac{x}{2} + \frac{\cos x}{2} + c$$

اکنون با توجه به شرط  $y(0) = 1$  مقدار  $c$  را می یابیم:

$$1 = y(0) = \frac{0}{2} + \frac{\cos(0)}{2} + c = \frac{1}{2} + c$$

که مقدار  $c = 1/2$  حاصل می شود. بنابراین تابع  $y = \frac{x}{2} + \frac{\cos x}{2} + \frac{1}{2}$  به عنوان جواب

معادله دیفرانسیل داده شده با شرط  $y(0) = 1$  حاصل می شود. ■

### تذکره ۱-۱۲

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل جدایی پذیر مرتبه ی اول به فرم زیر است:

$$f(y)dy = g(x)dx \quad \text{یا} \quad f(y)y' = g(x)$$

برای حل این معادله دیفرانسیل همانند مثال قبل، کافی است از طرفین آن انتگرال بگیریم.

#### مثال ۱-۴۶

معادله دیفرانسیل  $y' = \frac{2x}{1-2y}$  را حل کنید.

(حل)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1-2y}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$(1-2y)dy = 2xdx$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه‌ی فوق داریم:

$$\int (1-2y)dy = \int 2xdx$$

یعنی:

$$y - y^2 = x^2 + c$$

بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده به‌صورت رابطه‌ی

ضمنی  $y - (y^2 + x^2) = c$  است. ■

#### تمرین‌های بخش ۱-۸

۱. در هر قسمت مرتبه‌ی معادله دیفرانسیل داده شده را مشخص کنید.

الف)  $\sin x \frac{d^3 y}{dx^3} + \cos x \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = 2xy$

ب)  $6y'' + 3(y')^2 - x + \ln x = 0$

ج)  $-2 \frac{dq}{dt} + 3 \frac{d^2 q}{dt^2} - t^2 \sqrt{q} = 0$

د)  $(1-y')(2yy' + 3y''') = 0$

۲. در هر قسمت بررسی کنید که آیا تابع داده شده، جواب معادله دیفرانسیل متناظر است؟

$$xy' = x - y \quad \text{الف) } y = \frac{x}{2} + \frac{c}{x}$$

$$y'' + y = 0 \quad \text{ب) } y = -\varepsilon \cos x + \varepsilon \sin x$$

$$xy'' + (\varepsilon - x)y' - y = 0 \quad \text{ج) } y = \frac{1+x}{x^2}$$

$$yy'' - (y')^2 = y^\varepsilon \quad \text{د) } y = \sec x$$

۳. نشان دهید که برای هر عدد حقیقی و ثابت  $c$  تابع  $y = x + ce^y$  جوابی از معادله دیفرانسیل  $(x - y + 1)y' = 1$  است.

۴. معادلات دیفرانسیل جدایی پذیر زیر را حل کنید.

$$(e^x + 1)yy' = e^x \quad \text{الف) } x \frac{dy}{dx} - y = y^3$$

$$y' = \frac{2x-1}{x^2-x} \quad \text{ج) } \frac{dy}{dx} \cos x + y \ln y = 0$$

### تمرین‌های گوناگون فصل اول

۱. انتگرال‌های نامعین زیر را حل کنید.

$$\int \frac{x+1}{x+2} dx \quad \text{الف) } \int \sec^2 x e^{\tan x} dx$$

$$\int (1+x)\sqrt{x} dx \quad \text{ج) } \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx \quad \text{ه) } \int \frac{x^2}{\sqrt{4x^3+3}} dx$$

$$\int x^2 \sqrt{1-x} dx \quad (\text{ح})$$

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \quad (\text{ز})$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x + 3}}{x} dx \quad (\text{ی})$$

$$\int \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx \quad (\text{ط})$$

$$\int \frac{2x^5 - x}{x^6} dx \quad (\text{ل})$$

$$\int \frac{\sin 5x}{1 - \cos 5x} dx \quad (\text{ک})$$

$$\int \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^3 + 2x^2 + x - 2} dx \quad (\text{ن})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \quad (\text{م})$$

$$\int \frac{x^4 - x^2 + 2}{x^2(x+1)} dx \quad (\text{ع})$$

$$\int \frac{dx}{x(3 - \ln x)(1 - \ln x)} \quad (\text{س})$$

$$\int (\ln x)^2 dx \quad (\text{ص})$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \quad (\text{ف})$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} \quad (\text{ر})$$

$$\int \sec^2 x dx \quad (\text{ق})$$

۲. انتگرال‌های معین زیر را حل کنید.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} dx \quad (\text{الف})$$

$$\int_{-1}^1 |1-x-x^2| dx \quad (\text{د})$$

$$\int_0^{\ln 5} \frac{1}{1+e^x} dx \quad (\text{ج})$$

$$\int_0^2 [x^2] dx \quad (\text{و})$$

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x \ln x} \quad (\text{ه})$$

$$\int_0^2 |\sqrt{x} - 1| dx \quad (\text{ح})$$

$$\int_1^3 X^x e^x dx \quad (\text{ز})$$

$$\int_1^e \ln x dx \quad \text{ط} \quad \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(2+x)(3+x)} dx$$

۳. مساحت محدود شده در هر قسمت را بیابید.

الف)  $f(x) = x^2 - x - 6$  و محور  $x$  ها

ب)  $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$  و خطوط  $x=1$  و  $x=2$

ج)  $f(x) = \sin x$  و  $g(x) = \cos x$  در بازه‌ی  $[0, \frac{\pi}{2}]$

د)  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  در بازه‌ی  $[3, 4]$

ه)  $f(x) = |1-x|$  و  $g(x) = -|1-x|$  در بازه‌ی  $[-1, 2]$

و)  $f(x) = xe^x$  و  $g(x) = x$  در بازه‌ی  $[0, 1]$

۴. نشان دهید:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

۵. نشان دهید

$$\int_3^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} = \int_{-5}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$$

۶. اگر تابع هزینه نهایی یک بنگاه اقتصادی به صورت

$$MC(q) = q^2 - 4q + 5$$

باشد، و هزینه ثابت برابر با ۲ باشد، آنگاه تابع هزینه‌ی کل را بیابید.

۷. اگر تابع درآمدنهایی مؤسسه‌ای برابر با  $MR(q) = ۱۶ - q^۲$  باشد، آنگاه تابع درآمدکل را بیابید.

۸. اگر تابع تقاضای کالایی بصورت  $y = ۳۹ - x^۲$  باشد، آنگاه مازاد مصرف‌کننده را برای  $x_0 = \frac{۵}{۲}$  و  $y_0 = ۰$  بیابید.

۹. اگر توابع عرضه و تقاضا برای کالایی به ترتیب برابر  $f(x) = x + ۲$  و  $g(x) = -x + ۴$  باشد، آنگاه مازاد مصرف‌کننده و تولیدکننده را محاسبه کنید.

## فصل ۲

### بردار و ماتریس

#### هدف کلی

هدف کلی این فصل آشنایی با مفاهیم و تعاریف بردارها و ماتریس‌ها و اعمال جبری روی آن‌ها می‌باشد.

#### اهداف رفتاری

- دانشجو پس از مطالعه دقیق این فصل باید بتواند:
۱. با تعریف بردار و خواص ابتدایی آن آشنا شود.
  ۲. با اعمال جبری بر روی یک بردار آشنا شود.
  ۳. مفهوم ضرب داخلی دو بردار و نرم آن را توضیح دهد.
  ۴. با تعریف ماتریس و ماتریس‌های خاص آشنا گردد.
  ۵. اعمال جبری بر روی ماتریس‌ها را به‌طور کامل فراگیرد.
  ۶. دترمینان یک ماتریس مربعی را محاسبه نماید و با خواص آن آشنا گردد.
  ۷. با استفاده از روش ماتریس الحاقی وارون یک ماتریس داده شده را محاسبه نماید.
  ۸. با کاربرد وارون یک ماتریس در رمزنویسی آشنا شود.
  ۹. اعمال سطری مقدماتی روی یک ماتریس را بیان نموده و از آن‌ها برای محاسبه وارون یک ماتریس استفاده کند.

## مقدمه

در این فصل بطور اجمالی با نظریه‌ی جبر برداری و ماتریس‌ها که از جمله مباحث کاربردی ریاضیات در علوم مختلف است، آشنا خواهیم شد. در واقع مفهوم بردار و ماتریس به عنوان ابزاری در ساده سازی مسائل مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. البته مهمترین کاربرد جبر ماتریس‌ها را در فصل بعد، در حل یک دستگاه معادلات چند مجهولی، خواهیم دید.

## ۲-۱ بردارها

## ۲-۱-۱ مقدمه

بردارها را می‌توان به عنوان بلوک‌های تشکیل دهنده‌ی جبر ماتریسی تعبیر نمود. به همین دلیل قبل از بررسی ماتریس‌ها، ضروری به نظر می‌رسد که آشنایی اولیه‌ای با مفاهیم و تعاریف آن‌ها داشته باشیم. در این بخش به معرفی مقدماتی بردارها و برخی از خواص آن‌ها خواهیم پرداخت.

## ۲-۱-۲ تعریف

یک بردار عبارتست از نمایش ستونی برای یک یا چند عدد، که به هر یک از آن‌ها مؤلفه‌های آن بردار گفته می‌شود.

بعنوان مثال بردار  $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  دارای دو مؤلفه می‌باشد که مؤلفه‌ی اول آن عدد ۲ و مؤلفه‌ی دوم آن عدد ۳ است.

در حالت کلی به نمایش  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  یک بردار  $n$ -بعدی نامیم.

### ۲-۱-۳ تعریف

$$\text{دو بردار } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ و } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \text{ را مساوی نامیم اگر:}$$

الف)  $n = m$  (یعنی دو بردار هم بعد باشند)

ب) مؤلفه‌های متناظر در هر یک مساوی باشد، یعنی برای هر  $i$  داشته باشیم  $x_i = y_i$ .

### مثال ۲-۱

$$\text{مقادیر } a \text{ و } b \text{ را طوری بیابید که دو بردار } X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-2a \end{bmatrix} \text{ و } Y = \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix} \text{ مساوی باشند.}$$

(حل)

با توجه به این که دو بردار مورد نظر دارای بعد یکسانند، تنها کافی است که مؤلفه‌های

متناظرشان برابر باشد، بنابراین باید داشته باشیم  $b = 2$  و  $1-2a = -a$  و در نتیجه  $a = 1$ . ■

### ۲-۱-۴ تعریف

$$\text{ترانهاده‌ی بردار } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ را با } X^t \text{ نشان می‌دهیم و عبارتست از:}$$

$$X^t = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$$

۲-۱-۵ تعریف

ضرب اسکالر عدد دلخواه  $t$  در بردار  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  را با نماد  $tX$  نمایش داده و عبارتست از  $tX = \begin{bmatrix} tx_1 \\ tx_2 \\ \vdots \\ tx_n \end{bmatrix}$ . یعنی عدد  $t$  در تمام مؤلفه‌های بردار  $X$  ضرب می‌شود

۲-۱-۶ تعریف

اگر  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  و  $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$  دو بردار  $n$  -بعدي باشند، آنگاه جمع این دو بردار را با  $X + Y$  نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X + Y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

مثال ۲-۲

جمع دو بردار  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  امکان پذیر نیست و برای دو بردار  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

۷-۱-۲ تعریف

ضرب نقطه‌ای دوبردار  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  و  $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$  را با  $X.Y$  نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X.Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

مثال ۳-۲

اگر  $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$  و  $Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$  آنگاه:

$$X.Y = (1 \times 2) + (-1 \times 3) + (2 \times 0) = -1. \quad \blacksquare$$

۸-۱-۲ تعریف

نرم بردار  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  را با علامت  $\|X\|$  نمایش داده و عبارتست از  $\|X\| = \sqrt{X.X}$ .

از لحاظ شهودی نرم یک بردار همان طول بردار موردنظر است. بطور مثال

برای بردار  $X = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}$  داریم:

$$\|X\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{12}$$

۹-۱-۲ خواص بردارها

برای سه بردار  $n$ -بعدی  $X, Y, Z$  و همچنین اعداد حقیقی دلخواه  $t$  و  $s$  همواره داریم:

$$t(X + Y) = tX + tY. \quad ۱$$

$$۲. (t+s)X = tX + sX$$

$$۳. X + Y = Y + X$$

$$۴. X.Y = Y.X$$

$$۵. X.(Y + Z) = X.Y + X.Z$$

$$۶. (tX).Y = t(X.Y) = X.(tY)$$

$$۷. اگر  $X = 0$  آنگاه داریم  $X.X = 0$ .$$

$$۸. اگر  $X \neq 0$  آنگاه داریم  $X.X > 0$ .$$

 تمرین های بخش ۱-۲

۱. برای بردارهای  $X = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$  و  $Y = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \\ ۲ \end{bmatrix}$  و  $Z = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$  نشان دهید  $X.Y = X.Z$ .

۲. با فرض  $X = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \\ -۱ \end{bmatrix}$ ،  $Y = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$  و  $Z = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$  حاصل هر قسمت را بیابید.

(الف)  $Z - Y$  (ب)  $۷X + ۳Z$  (ج)  $-Y - ۲Z$  (د)  $(۴X + Y)^t$

(ه)  $۳Z - (Y - Z)$  (و)  $\|X + Y\|$  (ز)  $\|X\| + \|Y\|$  (ح)  $\frac{Y}{\|Y\|}$

۳. بردار  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  را طوری بیابید که در خاصیت  $\|X\| = ۱$  صدق کند.

## ۲-۲ ماتریس

### ۲-۲-۱ تعریف

به هر آرایش مستطیل شکل از اعداد که به صورت  $m$  سطر و  $n$  ستون مرتب شده باشند، یک ماتریس  $m$  در  $n$  (یا از مرتبه  $m \times n$ ) گوییم و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

عدد واقع در سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام را با نماد  $a_{ij}$  نشان داده و آن را **عنصر** یا **درایه‌ی ماتریس** نامیم. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ لاتین مانند  $A, B, C, \dots$  نمایش می‌دهیم.

برای خلاصه نویسی نمایش ماتریس  $A$ ، می‌توان از نماد  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  نیز استفاده کرد.

به عنوان مثال نمادهای

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌هایی با مرتبه‌های  $1 \times 3$ ،  $2 \times 2$  و  $3 \times 3$  هستند.

### ۲-۲-۲ تعریف

دو ماتریس  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{p \times q}$  را **مساوی** نامیم هرگاه:

(الف) دارای مرتبه‌ی مساوی باشند ( $n = q$  و  $m = p$ )

(ب) درایه‌های نظیر به نظیر دو ماتریس یکسان باشند (یعنی برای هر  $i$  و  $j$  داشته باشیم  $a_{ij} = b_{ij}$ )

## مثال ۲-۴

$$x \text{ را طوری بیابید که داشته باشیم } \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ x^2 - 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(حل)

با توجه به تعریف تساوی دو ماتریس کافی است داشته باشیم  $x^2 - 1 = 0$ . یعنی  $x = \pm 1$ . ■

## ۳-۲-۲ ماتریس های خاص

(الف) **ماتریس سطری**: ماتریسی که تنها دارای یک سطر است.

(ب) **ماتریس ستونی**: ماتریسی که تنها دارای یک ستون است. (هر بردار  $n$ -بعدی یک ماتریس ستونی است)

(ج) **ماتریس صفر**: ماتریسی که تمام درایه های آن صفر باشد. ماتریس صفر از مرتبه  $m \times n$  را معمولاً با نماد  $O_{m \times n}$  نمایش می دهیم.

(د) **ماتریس مربعی**: ماتریسی که در آن تعداد سطر و ستون برابر است. یک ماتریس مربعی  $n \times n$  را ماتریس از مرتبه  $n$  نامیم و به عناصر  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$  **عناصر قطر اصلی** گوئیم.

(ه) **ماتریس قطری**: یک ماتریس مربعی که عناصر خارج قطر اصلی آن همگی صفرند. (و) **ماتریس اسکالر**: یک ماتریس قطری که تمام عناصر قطر اصلی آن با هم برابر باشند.

(ز) **ماتریس واحد (همانی)**: یک ماتریس اسکالر که همه ی درایه های قطر اصلی آن برابر یک است. ماتریس همانی از مرتبه  $n$  را با  $I_n$  نمایش می دهیم.

(ح) **ماتریس بالا مثلثی**: ماتریس مربعی که عناصر زیر قطر اصلی آن صفرند.

(ط) **ماتریس پایین مثلثی**: ماتریس مربعی که عناصر بالای قطر اصلی آن صفرند.

## مثال ۲-۵

(الف) یک ماتریس سطری  $1 \times 4$ :

$$A = [-8 \quad 0 \quad 1/4 \quad -1/3]$$

(ب) یک ماتریس ستونی  $4 \times 1$ :

$$B = \begin{bmatrix} 9/1 \\ 2/7 \\ -6/7 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

ج) مثالهایی از ماتریس صفر:

$$O_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

د) مثالهایی از ماتریس مربعی:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 33 \\ 26 & 13 & 0 \\ -491 & 6 & -135 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

ه) نمایش قطر اصلی در یک ماتریس:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

و) یک ماتریس قطری:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

ز) یک ماتریس اسکالر:

$$F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ح) دو ماتریس واحد:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ط) یک ماتریس بالا مثلثی:

$$G = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ی) یک ماتریس پایین مثلثی:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 4 & 64 & 0 \end{bmatrix}$$

## ۲-۲-۴ اعمال جبری روی ماتریس‌ها

در این بخش به بررسی اعمال مقدماتی جمع، تفریق، ضرب اسکالر و ضرب ماتریسی خواهیم پرداخت.

الف) جمع دو ماتریس: جمع دو ماتریس هم مرتبه  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ، ماتریسی مانند  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$  است که در آن  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

بطور مثال اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$  آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} C = A + B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 7 & -3 \\ -3 & 13 & 15 \\ 8 & 5 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ب) ضرب اسکالر در ماتریس: ضرب اسکالر  $k$  در ماتریس  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، را با  $kA$  نمایش داده و ماتریسی است که در آن هر درایه‌ی ماتریس  $A$ ، در عدد  $k$  ضرب شده است یعنی:  $kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$ .  
بطور مثال:

$$3 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1/7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ 3 \times 1/7 & 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 5/1 & 6 \end{bmatrix}$$

ج) قرینه‌ی یک ماتریس: قرینه‌ی ماتریس  $A$  را با  $-A$  نمایش می‌دهیم و عبارتست از ضرب اسکالر عدد  $-1$  در ماتریس  $A$ .

$$\text{بطور مثال قرینه‌ی ماتریس } A = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ & -۶ \\ -۷ & ۸ & ۹ \\ ۱ & -۲ & ۳ \end{bmatrix} \text{ عبارتست از:}$$

$$-A = -1 \times A = \begin{bmatrix} -۴ & -۵ & ۶ \\ ۷ & -۸ & -۹ \\ -۱ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

(د) **تفریق دو ماتریس:** تفریق دو ماتریس هم مرتبه‌ی  $A$  و  $B$  را با نماد  $A - B$  نمایش می‌دهیم و عبارتست از:

$$A - B = A + (-B)$$

$$\text{به عنوان مثال اگر } A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ & -۶ \\ -۷ & ۸ & ۹ \\ ۱ & -۲ & ۳ \end{bmatrix} \text{ آنگاه داریم:}$$

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۴ & -۵ & ۶ \\ ۷ & -۸ & -۹ \\ -۱ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -۳ & -۳ & ۹ \\ ۱۱ & -۳ & -۳ \\ ۶ & ۱۰ & ۶ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(د) **ضرب دو ماتریس:** ماتریس‌های  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{n \times p}$  را در نظر می‌گیریم. منظور از حاصلضرب ماتریس  $A$  در ماتریس  $B$ ، ماتریسی  $m \times p$  مانند  $C$  است که  $C = [c_{ij}]_{m \times p}$  و درایه‌ی واقع در سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

شایان ذکر است که حاصلضرب ماتریس  $A$  در  $B$  را با  $AB$  نشان می‌دهیم. در واقع عنصر  $c_{ij}$  در ماتریس  $AB$  برابر با ضرب نقطه‌ای سطر  $i$ ام ماتریس  $A$  در ستون  $j$ ام ماتریس  $B$  است. یعنی:

$$(\text{ستون } j \text{ ام ماتریس } B) \cdot (\text{سطر } i \text{ ام ماتریس } A) = (\text{درایه } c_{ij} \text{ ماتریس } AB)$$

بطور مثال در مورد ضرب دو ماتریس  $3 \times 3$  اگر داشته باشیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

آنگاه :

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

## تذکر ۱-۲

ضرب ماتریس  $A$  در  $B$  همیشه امکان پذیر نیست! این عمل تنها در صورتی انجام پذیر است که تعداد ستون‌های ماتریس  $A$  برابر با تعداد سطرهای ماتریس  $B$  باشد:

$$(A_{m \times n})(B_{n \times p}) \Rightarrow (AB)_{m \times p}$$

بدیهی است که در مورد دو ماتریس مربعی هم مرتبه مانند  $A$  و  $B$  ضرب  $A$  در  $B$  (یعنی  $AB$ ) و ضرب  $B$  در  $A$  (یعنی  $BA$ ) امکان پذیر است.

## مثال ۶-۲

$$\text{اگر } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ آنگاه ماتریس‌های } AB \text{ و } BA \text{ را بیابید.}$$

(حل)

در ابتدا باید دقت کنیم که این ضرب‌ها امکان پذیر است و همچنین حاصل هر دو باید به صورت ماتریس‌های  $3 \times 3$  باشد. بنابراین:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 1 & 1 \times 5 + 2 \times 8 + 3 \times 2 & 1 \times 6 + 2 \times 9 + 3 \times 3 \\ 4 \times 4 + 5 \times 7 + 6 \times 1 & 4 \times 5 + 5 \times 8 + 6 \times 2 & 4 \times 6 + 5 \times 9 + 6 \times 3 \\ 7 \times 4 + 8 \times 7 + 9 \times 1 & 7 \times 5 + 8 \times 8 + 9 \times 2 & 7 \times 6 + 8 \times 9 + 9 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 27 & 33 \\ 57 & 72 & 87 \\ 93 & 117 & 141 \end{bmatrix}$$

به همین طریق برای  $BA$  داریم:

$$BA = \begin{bmatrix} 66 & 81 & 96 \\ 113 & 126 & 150 \\ 30 & 36 & 42 \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم که  $AB \neq BA$ ، یعنی در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت جابجایی نیست. ■

## ۲-۲-۵ خواص جبری ماتریس‌ها

الف) خواص جمع، تفریق و ضرب اسکالر:

اگر  $A, B, C$  سه ماتریس هم مرتبه و  $r$  و  $s$  اعداد حقیقی دلخواهی باشند، آنگاه داریم:

$$1. A + B = B + A$$

$$2. A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$3. A + O = O + A = A$$

$$4. A - A = O$$

$$5. (r + s)A = rA + sA$$

$$6. r(A + B) = rA + rB$$

$$7. (rs)A = r(sA) = s(rA)$$

$$8. A + B = A + C \Rightarrow B = C$$

ب) خواص ضرب ماتریس‌ها:

۱. عمل ضرب ماتریس‌ها شرکت پذیر است، یعنی:

$$A(BC) = (AB)C$$

۲. همان‌طور که در مثال قبل دیدیم، ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد و

بنابراین تساوی  $AB = BA$  همواره برقرار نیست.

۳. برای ماتریس مربعی  $A$  از مرتبه  $n$  داریم:

$$AI_n = I_n A = A$$

۴. عمل ضرب نسبت به جمع از دو طرف توزیع پذیر است، یعنی:  
 $(A + B)C = AC + BC$  و  $A(B + C) = AB + AC$

**۶-۲-۲ تعریف**

اگر در ماتریس  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  جای سطرها و ستون‌ها را با یکدیگر تعویض کنیم، ماتریس جدیدی از مرتبه  $n \times m$  حاصل می‌شود که آن را **ترانهاده‌ی ماتریس A** گوئیم و با  $A^t$  نمایش می‌دهیم.

$$\text{بطور مثال برای } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ داریم:}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}, B^t = [1 \quad -3 \quad 4] \text{ و } C^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

**۷-۲-۲ خواص ترانهاده‌ی یک ماتریس**

برای دو ماتریس  $m \times n$  مانند A و B و عدد حقیقی k داریم:

(الف)  $(A^t)^t = A$  (اگر از ماتریسی دو مرتبه ترانهاده بگیریم به همان ماتریس ابتدایی می‌رسیم)

(ب)  $(kA)^t = kA^t$  (ترانهاده مضربی از یک ماتریس برابر با همان مضرب در ترانهاده‌ی ماتریس داده شده است)

(ج)  $(A + B)^t = A^t + B^t$  (ترانهاده‌ی مجموع دو ماتریس با مجموع ترانهاده‌های آنها برابر است)

(د) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند، آنگاه  $(AB)^t = B^t A^t$ .

**مثال ۷-۲**

برای ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  خاصیت (ج) را بررسی کنید.  
 (حل)

$$(A+B)^t = A^t + B^t \text{ باید نشان دهیم}$$

ابتدا به محاسبه‌ی سمت چپ تساوی فوق می‌پردازیم:

$$A+B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

پس داریم:

$$(A+B)^t = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

همچنین  $A^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، بنابراین:

$$A^t + B^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

یعنی طرفین تساوی مورد نظر با یکدیگر برابر هستند. ■

#### ۸-۲-۲ تعریف

ماتریس مربعی  $A$  را متقارن نامیم هرگاه  $A^t = A$ .

$$\text{بطور مثال ماتریس } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ یک ماتریس متقارن است.}$$

دقت کنیم که در یک ماتریس متقارن تمام عناصر نسبت به قطر اصلی تقارن دارند. پس برای هر درایه‌ی دلخواه  $a_{ij}$  از یک ماتریس متقارن داریم  $a_{ij} = a_{ji}$ .

#### ۹-۲-۲ تعریف

ماتریس مربعی  $A$  را پاد متقارن نامیم هرگاه  $A^t = -A$ .

بنابراین در یک ماتریس پادمتقارن تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی صفر خواهد بود زیرا در یک ماتریس پاد متقارن  $a_{ij} = -a_{ji}$ ، بخصوص درحالتی که  $i = j$  با شد، خواهیم داشت:

$$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$$

برای مثال ماتریس  $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & \sqrt{3} \\ -3 & -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$  یک ماتریس پادمتقارن است.

#### ۲-۲-۱۰ تعریف

در هر ماتریس مربعی  $A$ ، مجموع تمام عناصر قطر اصلی را اثر ماتریس  $A$  نامیم و با نماد  $\text{tr}(A)$  نمایش می‌دهیم.

بطور مثال برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 9 & 4 & 9 \end{bmatrix}$  داریم:

$$\text{tr}(A) = 1 + 5 + 9 = 15$$

#### ۲-۲-۱۱ تعریف

اگر  $A$  یک ماتریس مربعی باشد، حاصلضرب  $A$  در خودش را با  $A^2$  نمایش می‌دهیم و به همین طریق، توان  $n$ ام یک ماتریس  $A$  قابل تعریف است:

$$\begin{aligned} A^2 &= AA \\ A^3 &= A^2 A \\ &\vdots \\ A^n &= A^{n-1} A \end{aligned}$$

در مورد توان  $n$ ام یک ماتریس مربعی خواص زیر برقرار است:

- اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}$  آنگاه:

الف) برای  $n$  زوج داریم  $A^n = \begin{bmatrix} k^n & 0 \\ 0 & k^n \end{bmatrix}$ .

ب) برای  $n$  فرد داریم  $A^n = \begin{bmatrix} 0 & k^n \\ k^n & 0 \end{bmatrix}$ .

- اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه:

$$A^n = \begin{bmatrix} (ab)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & (ab)^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} \quad \text{الف) برای } n \text{ زوج داریم}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & \frac{n+1}{2} & \frac{n-1}{2} \\ a^{\frac{n-1}{2}} & b^{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ب) برای } n \text{ فرد داریم}$$

### مثال ۲-۸

اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  آنگاه حاصل  $A^{16}$  و  $A^{21}$  را بیابید.

حل

داریم:

$$A^{16} = \begin{bmatrix} (-1)^{16} & 0 \\ 0 & (-1)^{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و}$$

$$A^{21} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{21} \\ (-1)^{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

### تمرین‌های بخش ۲-۲



۱. اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$  آنگاه ماتریس  $C$  را طوری بیابید که داشته باشیم  $-2AB + I_2C = 0$ .

۲. مقادیر  $x$  و  $y$  را چنان بیابید که  $\begin{bmatrix} 1-x^2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4^{y-1} & 3 \end{bmatrix}$

۳. برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  نشان دهید  $A^2 - 4A + 5I = 0$ .

۴. اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  باشد، ماتریس‌های  $A^2 - A$  و  $A^3$  را بیابید.

۵. اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2a & b+6 \\ 2b & a+5 \end{bmatrix}$  و همچنین داشته باشیم  $AB = BA$  آنگاه مقادیر  $a$  و  $b$  را بیابید.

۶. ماتریس  $A$  را طوری بیابید که تساوی زیر برقرار باشد:

$$2A - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^t$$

۷. با فرض  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$$(AB)^t = B^t A^t$$

۸. اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  آنگاه مقادیر  $A^{100}$  و  $A^{39}$  را بیابید.

۹. با ارائه‌ی مثال نشان دهید که از تساوی  $AB = 0$  همواره نمی‌توان نتیجه گرفت که  $A$  یا  $B$  ماتریس صفر هستند.

۱۰. با ارائه‌ی مثالی برای ماتریس‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  نشان دهید که تساوی  $AB = AC$  همواره تساوی  $B = C$  را نتیجه نمی‌دهد.

## ۲-۳ دترمینان

به هر ماتریس مربعی  $A$ ، عددی نسبت داده می‌شود که به آن دترمینان گوییم و آن را با نماد  $\det(A)$  و یا  $|A|$  نمایش می‌دهیم.

در این بخش به معرفی روش یافتن دترمینان ماتریس‌های مربعی از مرتبه‌ی ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌پردازیم و سپس برخی از خواص دترمینان را بررسی می‌کنیم.

### ۲-۳-۱ دترمینان ماتریس مربعی مرتبه یک

برای یک ماتریس مربعی  $A = [a]_{1 \times 1}$  دترمینان آن برابر  $a$  تعریف می‌شود.

بطور مثال ماتریس‌های  $[-4]$ ،  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  و  $[\sqrt{2}]$  بترتیب دارای دترمینان‌هایی برابر

$$-4, \frac{1}{2} \text{ و } \sqrt{2} \text{ هستند.}$$

### ۲-۳-۲ دترمینان ماتریس مربعی مرتبه دو

برای هر ماتریس مربعی  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2}$  داریم  $\det(A) = |A| = ad - bc$ .

بطور مثال برای ماتریس مربعی  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  داریم:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (2 \times 5) - (-3 \times 2) = 16$$

### ۳-۳-۲ دترمینان ماتریس مربعی در حالت کلی

برای بیان دترمینان ماتریس‌های مربعی در حالت کلی ابتدا به معرفی چند مفهوم جدید می‌پردازیم:

#### ۲-۳-۴ تعریف

ماتریس مربعی  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  را در نظر بگیریم. ماتریس حاصل از حذف  $i$ امین سطر و  $j$ امین ستون ماتریس  $A$  را با  $A_{ij}$  نمایش می‌دهیم. این ماتریس از مرتبه  $(n-1) \times (n-1)$  است. دترمینان ماتریس  $A_{ij}$  (یعنی  $|A_{ij}|$ ) را **مینور یا کهاد** عنصر  $a_{ij}$  در ماتریس  $A$  نامیم.

بطور مثال برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  داریم:

$$\begin{aligned} |A_{23}| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0, & |A_{11}| &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \\ |A_{32}| &= \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 - (-6) = 6, & |A_{13}| &= \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \end{aligned}$$

#### ۲-۳-۵ تعریف

برای هر ماتریس مربعی  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ، عبارت  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$  را **همسازهی عنصر  $a_{ij}$**  نامیم.

## مثال ۲-۹

اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  آنگاه همسازیه‌های  $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{23}$  و  $\Delta_{31}$  را بیابید.

(حل)

با توجه به تعریف داریم:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{و} \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 21$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 8 \quad \text{و} \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad \blacksquare$$

## ۲-۳-۶ تعریف

دترمینان ماتریس مربعی  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  را به صورت

$$\det A = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \dots + a_{in}\Delta_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}\Delta_{ik}$$

تعریف می‌کنیم و آن را دترمینان  $A$  بر حسب بسط سطر  $i$ ام گوئیم.

از تعریف قبل مشخص است که دترمینان هر ماتریس را بر حسب بسط هر سطر دلخواهی از آن می‌توان محاسبه نمود و این انتخاب تأثیری بر مقدار دترمینان نخواهد داشت. به همین طریق می‌توان دترمینان یک ماتریس را نسبت به هر ستون دلخواهی از آن بسط داد. یعنی دترمینان  $A$  بر حسب بسط ستون  $j$ ام ماتریس  $A$  عبارتست از:

$$\det A = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \dots + a_{nj}\Delta_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}\Delta_{kj}$$

بنابراین برای محاسبه‌ی دترمینان یک ماتریس در حالت کلی مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله‌ی ۱: سطر یا ستون دلخواهی از ماتریس داده شده را انتخاب می‌کنیم.

مرحله‌ی ۲: تمام همسازیه‌های آن سطر یا ستون انتخاب شده را محاسبه می‌کنیم.

مرحله‌ی ۳: هر عنصر سطر یا ستون مورد نظر را در همسازیه‌ی نظیرش ضرب می‌کنیم و

سرانجام حاصل را با یکدیگر جمع می‌کنیم.

### مثال ۲-۱۰

دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 9 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$  را محاسبه کنید.

(حل)

می‌خواهیم مقدار دترمینان را برحسب بسط سطر سوم محاسبه کنیم. (داریم  $a_{31} = 0$ ،  $a_{32} = 7$  و  $a_{33} = 2$ ) برای این منظور باید همسازهای عناصر متناظر این سطر یعنی  $\Delta_{31}$ ،  $\Delta_{32}$  و  $\Delta_{33}$  را محاسبه کنیم:

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} |A_{31}| = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_{32} = (-1)^{3+2} |A_{32}| = (-1)^5 \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -75$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} |A_{33}| = (-1)^6 \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 60$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33} \\ &= (0)(9) + (7)(-75) + (2)(60) = -405. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### تذکر ۲-۲

در محاسبه‌ی دترمینان به کمک بسط سطر یا ستون بهتر است همواره از سطر یا ستونی استفاده نمود که بیشترین تعداد صفر در آن قرار دارد، زیرا با توجه به این که حاصلضرب صفر در همسازهای درایه‌ی متناظر با صفر، برابر صفر است، نیازی به محاسبه‌ی همسازهای صفر نیست.

### مثال ۲-۱۱

دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$  را بیابید.

(حل)

با توجه به این که بیشترین صفر در ستون اول و در سطر دوم قرار دارد، مناسب است که دترمینان ماتریس مورد نظر را نسبت به این ستون یا سطر محاسبه کرد. با بسط دترمینان مورد نظر نسبت به ستون اول داریم:

$$\det A = (0)\Delta_{11} + (0)\Delta_{21} + (2)\Delta_{31} + (1)\Delta_{41} = 2\Delta_{31} + 3\Delta_{41}$$

اما:

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 - 10 + 6 = -2$$

$$\Delta_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = - \left( \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -(3 - 8 + 9) = -4$$

پس داریم:

$$\det A = 2\Delta_{31} + 3\Delta_{41} = 2(-2) + 3(-4) = -16. \blacksquare$$

### ۲-۳-۷ روش ساروس برای یافتن دترمینان ماتریس $3 \times 3$

برای یافتن دترمینان ماتریس‌های مربعی از مرتبه‌ی ۳، می‌توان از روش سریع تری بنام دستور ساروس استفاده نمود:

$$\text{برای محاسبه‌ی دترمینان ماتریس } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ابتدا ماتریس } A \text{ را دو بار در}$$

کنار هم می‌نویسیم و خطوط ممتد و نقطه چین را به صورت نشان داده شده رسم می‌کنیم. حاصلضرب‌های اعداد واقع بر خطوط ممتد رسم شده را به دست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم. بنابراین عبارت  $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$  حاصل می‌شود. به همین طریق حاصلضرب اعداد واقع بر هر خط نقطه چین را به دست آورده و با هم جمع می‌کنیم بنابراین عبارت  $a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}$  حاصل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

در این صورت داریم:

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

### مثال ۲-۱۲

دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  را به روش ساروس بیابید.

(حل)

داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

پس :

$$\det(A) = (36 + 6 + 0) - (0 + 45 + 48) = 45. \quad \blacksquare$$

### ۳-۳-۸ ویژگی‌های دترمینان

در این قسمت به ذکر ویژگی‌هایی از دترمینان می‌پردازیم که در محاسبه‌ی دترمینان یک ماتریس مفید واقع می‌شود.

الف) اگر تمام درایه‌های یک سطر (ستون) ماتریس  $A$  صفر باشد دترمینان آن برابر صفر است.

ب) اگر تمام درایه‌های یک سطر (ستون) ماتریس  $A$  در یک عدد ثابت  $k$  ضرب شوند آنگاه مقدار دترمینان در عدد  $k$  ضرب می‌شود. به عکس می‌توان از عدد ثابت  $k$  در درایه‌های یک سطر یا یک ستون فاکتور گرفت و آن را در دترمینان ضرب نمود.

ج) اگر جای دو سطر (ستون) ماتریس  $A$  را عوض کنیم آنگاه مقدار دترمینان در  $A$  ضرب می‌شود.

د) اگر دو سطر (ستون)  $A$  یکسان باشد آنگاه دترمینان این ماتریس صفر است.

د) اگر یک سطر (ستون)  $A$  مضربی از یک سطر (ستون) دیگر  $A$  باشد آن گاه دترمینان این ماتریس صفر است.

ه) اگر تمام درایه‌های ماتریس  $A$  در  $k$  ضرب شوند و  $A$  ماتریسی از مرتبه‌ی  $n$  باشد، داریم  $\det(kA) = k^n \det(A)$ .

و) اگر  $A^t$  ترانپوذه‌ی ماتریس  $A$  باشد، آنگاه داریم  $\det(A^t) = \det(A)$ .  
 ز) دترمینان ماتریس  $A$  که به شکل زیر است را می‌توان به صورت مجموع دو دترمینان نوشت:

$$\begin{vmatrix} a+m & b & c \\ d+n & e & f \\ g+o & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & b & c \\ n & e & f \\ o & h & i \end{vmatrix}$$

ح) اگر مضربی از یک سطر (یا ستون) را به سطر (یا ستون) دیگر اضافه کنیم آنگاه مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

ط) برای هر دو ماتریس مربعی  $A$  و  $B$  که هم مرتبه اند، داریم:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

ی) برای هر عدد طبیعی  $k$  داریم  $|A^k| = |A|^k$ .

ک) در حالت کلی رابطه  $|A+B| = |A| + |B|$  برقرار نیست.

ل) دترمینان ماتریس مثلثی (بالا مثلثی و یا پایین مثلثی) برابر حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی آن است.

### مثال ۲-۱۳

الف) اگر  $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$  آنگاه بنا به خاصیت الف) داریم:  $|A| = 0$ . ■

ب) اگر  $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$ ، چون این ماتریس دو سطر برابر دارد پس  $|A| = 0$ . ■

ج) با فرض  $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 7 & -14 & 4 \\ -3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$  داریم  $|A| = 0$  زیرا ستون اول و دوم مضربی از

یکدیگر هستند. ■

(د) می‌دانیم که  $-3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$  در این صورت اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 8 \\ -4 & 0 & -12 \\ 4 & -20 & -8 \end{bmatrix}$  آنگاه

بنا به خاصیت داریم  $|A| = (-4)^3(-3) = 192$  ■

(و) اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ، چون  $A$  یک ماتریس مثلثی است پس داریم:

■  $|A| = 3 \times 8 \times 7 = 168$

## مثال ۲-۱۴

بدون محاسبه‌ی مستقیم، دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$  را به کمک ویژگی‌های دترمینان بیابید.

(حل)

سعی ما بر این است که ماتریس  $A$  به صورت پائین مثلثی بنویسیم و این امر را با توجه به این خاصیت که افزودن ضربی از یک سطر ماتریس به سطر دیگر در مقدار دترمینان تغییری ایجاد نمی‌کند، پیگیری می‌کنیم.

نخست فرض کنیم نمادهای  $R_1, R_2, R_3$  و  $R_3$  نشان دهنده‌ی سطرهاى اول، دوم و سوم در یک ماتریس باشند، بنابراین:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2 \Rightarrow R_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_3 \Rightarrow R_3} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{7}{-3}R_2 + R_3 \Rightarrow R_3} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -1. \quad \blacksquare$$

مثال ۲-۱۵

بدون محاسبه‌ی مستقیم نشان دهید:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

(حل)

داریم:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1 \Rightarrow R_1} \begin{vmatrix} a+1 & 2 & a+1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+R_1 \Rightarrow R_1} \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_1+R_2 \Rightarrow R_2} (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_3 \Rightarrow R_3} (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

■ حال با توجه به مثلثی بودن آخرین ماتریس داریم  $|A| = (a+2)(a-1)^2$ .

### تمرین‌های بخش ۲-۳

۱. دترمینان ماتریس‌های زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ج)}$$

۲. اگر داشته باشیم  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \\ -8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$  آنگاه مقدار  $|A|$  و  $|A^t|$  را بیابید.

۳. اگر برای یک ماتریس  $4 \times 4$  مانند  $A$  داشته باشیم  $|A| = 3$  و  $B = 2A$  آنگاه مقدار  $|B|$  را محاسبه کنید.

۴. به کمک خواص دترمینان نشان دهید:

$$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z$$

۵. به کمک خواص دترمینان نشان دهید:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^2$$

۶. بدون محاسبه‌ی مستقیم، نشان دهید:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

## ۲-۴ وارون ماتریس

### ۲-۴-۱ تعریف

ماتریس مربعی  $B$  را وارون ماتریس مربعی  $A$  (از مرتبه‌ی  $n$ ) نامیم اگر

$$AB = BA = I_n$$

و در این صورت  $A$  را **وارون‌پذیر** نامیم. بدیهی است اگر  $B$  وارون  $A$  باشد، آنگاه  $A$  نیز وارون  $B$  است.

می‌توان نشان داد که وارون یک ماتریس در صورت وجود یکتاست و مناسب است که وارون ماتریس  $A$  را با  $A^{-1}$  نشان دهیم.

### مثال ۲-۱۶

با توجه به این که برای دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  داریم

$$AB = BA = I_2, \text{ بنابراین } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

**۲-۴-۲ تعریف**

ماتریس مربعی  $A$  را در نظر می‌گیریم. اگر دترمینان این ماتریس برابر صفر باشد، آنرا **منفرد** و در غیر این صورت **نامنفرد** نامیم.

**تذکر ۳-۲**

هر ماتریس نامنفرد، وارون پذیر است و بالعکس.

**مثال ۱۷-۲**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, O = [0]_{1 \times 1}, \text{ با توجه به اینکه دترمینان ماتریس‌های } O$$

$$\text{و } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ صفر است، هر سه ماتریس منفردند و در نتیجه وارون ناپذیر.} \blacksquare$$

برای یافتن وارون یک ماتریس نامنفرد، ذکر تعاریف زیر الزامی است.

**۲-۴-۳ تعریف**

**ماتریس همسازهی** یک ماتریس مربعی  $A_{n \times n}$ ، ماتریسی مربعی از مرتبه‌ی  $n$  است که درایه‌هایش همان همسازهی‌های عناصر  $A$  هستند و آنرا با  $\Delta$  نمایش می‌دهیم:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \cdots & \Delta_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \Delta_{n3} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

۲-۴-۴ تعریف

ماتریس الحاقی ماتریس مربعی  $A_{n \times n}$  را با نماد  $\text{adj}(A)$  نمایش داده و عبارتست از:

$$\text{adj}(A) = \Delta^t$$

یعنی اگر ماتریس همسازهی  $A$  را محاسبه نموده و ترانهایه‌ی آنرا بیابیم، ماتریس الحاقی  $A$  به دست می‌آید.

مثال ۲-۱۸

$$A = \begin{bmatrix} ۷ & -۵ & ۲ \\ ۳ & ۴ & -۱ \\ ۶ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \text{ ماتریس‌های همساز و الحاقی } A \text{ را بیابید.}$$

(حل)

$$\begin{aligned} \Delta_{۱۱} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} ۴ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۰ & \text{ و } & \Delta_{۱۲} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} ۳ & -۱ \\ ۶ & ۰ \end{vmatrix} = -۶ \\ \Delta_{۱۳} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۶ & ۰ \end{vmatrix} = -۲۴ & \text{ و } & \Delta_{۲۱} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} -۵ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۰ \\ \Delta_{۲۲} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} ۷ & ۲ \\ ۶ & ۰ \end{vmatrix} = -۱۲ & \text{ و } & \Delta_{۲۳} &= (-1)^۵ \begin{vmatrix} ۷ & -۵ \\ ۶ & ۰ \end{vmatrix} = -۳۰ \\ \Delta_{۳۱} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} -۵ & ۲ \\ ۴ & -۱ \end{vmatrix} = -۳ & \text{ و } & \Delta_{۳۲} &= (-1)^۵ \begin{vmatrix} ۷ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix} = ۱۳ \\ \Delta_{۳۳} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} ۷ & -۵ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} = ۴۳ \end{aligned}$$

پس:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{۱۱} & \Delta_{۱۲} & \Delta_{۱۳} \\ \Delta_{۲۱} & \Delta_{۲۲} & \Delta_{۲۳} \\ \Delta_{۳۱} & \Delta_{۳۲} & \Delta_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۶ & -۲۴ \\ ۰ & -۱۲ & -۳۰ \\ -۳ & ۱۳ & ۴۳ \end{bmatrix}$$

اکنون با توجه به این که  $\text{adj}(A) = \Delta^t$  داریم:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۳ \\ -۶ & -۱۲ & ۱۳ \\ -۲۴ & -۳۰ & ۴۳ \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

## ۲-۴-۵ محاسبه‌ی ماتریس وارون

وارون ماتریس نامنفرد A را به کمک رابطه‌ی زیر محاسبه می‌کنیم:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

### مثال ۲-۱۹

وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  را بیابید.

(حل)

$\det(A) = -18$  بنابر مثال قبل داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{-18} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -6 & -12 & 13 \\ -24 & -30 & 43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-13}{18} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-43}{18} \end{bmatrix}. \blacksquare$$

### تذکره ۲-۴

وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، با شرط  $|A| \neq 0$  از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

### مثال ۲-۲۰

وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  را بیابید.

(حل)

با توجه به رابطه‌ی فوق داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{-9} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \blacksquare$$

## ۲-۴-۶ خواص ماتریس وارون

اگر ماتریس‌های مربعی  $A$  و  $B$  نامنفرد و هم مرتبه باشند، آنگاه:

(الف) وارون وارون ماتریس  $A$  برابر خودش است. یعنی  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

(ب) وارون ترانهایدهی  $A$  برابر ترانهایدهی وارون  $A$  است. یعنی  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .

(ج) برای حاصلضرب  $A$  در  $B$  داریم  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

(د) دترمینان  $A^{-1}$  برابر معکوس دترمینان  $A$  است، یعنی  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

## تمرین‌های بخش ۲-۴

۱. کدامیک از ماتریس‌های زیر وارون پذیر است؟

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

۲. برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  مقادیر  $\Delta_{21}$ ،  $\Delta_{13}$  و  $\Delta_{33}$  را بیابید.

۳. با فرض  $\det(A) = 3$  و  $\det(B) = -2$ ، مقادیر زیر را بیابید:

(الف)  $\det(A^{-1})$  (ب)  $\det(ABA^{-1})$  (ج)  $\det((A^2)^{-1})$

۴. وارون ماتریس‌های زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ج)}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & -6 & -3 \end{bmatrix} \text{ (د)} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ه)}$$

۵. اگر  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  آنگاه ماتریس  $A$  را بیابید.

۶. برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$  نشان دهید که :

الف)  $\text{adj}(A) = A$       ب)  $A = A^{-1}$

۷. تعیین کنید که به ازای چه مقادیری از  $a$  ماتریس‌های زیر وارون پذیر نیست.

الف)  $A = \begin{bmatrix} -1 & a \\ a-1 & 3 \end{bmatrix}$       ب)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 1-a & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

## ۲-۵ کاربرد از ماتریس‌ها در رمزنویسی

در این قسمت به بررسی یکی از کاربردهای جالب ماتریس‌ها با عنوان رمزنویسی پیام‌ها می‌پردازیم. رمز نویسی فرآیندی است که طی آن می‌توان پیام متنی را به صورت رمز شده درآورد و یا از حالت رمز شده خارج نمود. پیشینه‌ی استفاده از این روش به یونانیان باستان باز می‌گردد و در حال حاضر روش‌های بسیار پیچیده و پیشرفته‌ای برای رمز گذاری و رمز گشایی ابداع شده است. یک نمونه از این رمز نویسی‌ها که عمل بازگشایی آن بسیار پیچیده است، توسط ماتریس‌ها انجام می‌گیرد. در اینجا به کمک یک مثال چگونگی انجام این عمل را شرح می‌دهیم:

### ۲-۵-۱ رمزگذاری یک پیام متنی توسط ماتریس ۲×۲

فرض کنیم سربازی بخواهد پیام متنی GET HELP را توسط ماتریس دلخواه  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  به صورت رمز شده بیان کند (به ماتریس  $A$  در اصطلاح ماتریس رمز ساز گوئیم) و آن را به کمک بیسیم مخابراتی ارسال نماید. برای انجام این عمل ابتدا به هر یک از حروف الفبای لاتین یک عدد قراردادی نسبت داده می‌شود:

جدول ۲-۱. جدول کدهای قراردادی

|               |     |      |      |      |      |      |
|---------------|-----|------|------|------|------|------|
| فضای خالی = ۰ | D=۴ | H=۸  | L=۱۲ | P=۱۶ | T=۲۰ | X=۲۴ |
| A= ۱          | E=۵ | I=۹  | M=۱۳ | Q=۱۷ | U=۲۱ | Y=۲۵ |
| B=۲           | F=۶ | J=۱۰ | N=۱۴ | R=۱۸ | V=۲۲ | Z=۲۶ |
| C=۳           | G=۷ | K=۱۱ | O=۱۵ | S=۱۹ | W=۲۳ |      |

در این صورت برای عبارت مورد نظر داریم:

|   |   |    |   |   |   |    |    |
|---|---|----|---|---|---|----|----|
| G | E | T  |   | H | E | L  | P  |
| ۷ | ۵ | ۲۰ | ۰ | ۸ | ۵ | ۱۲ | ۱۶ |

یعنی دنباله‌ی رمز نشده‌ی عبارت GET HELP برابر است با ۷،۵،۲۰،۰،۸،۵،۱۲،۱۶ اکنون از سمت چپ، اعداد به دست آمده را به صورت ماتریس‌های سطری ۱×۲ می‌نویسیم:

|       |        |       |         |   |   |   |   |
|-------|--------|-------|---------|---|---|---|---|
| G     | E      | T     |         | H | E | L | P |
| [۵ ۷] | [۰ ۲۰] | [۵ ۸] | [۱۶ ۱۲] |   |   |   |   |

تاکنون عبارت GET HELP را به صورت ماتریس‌های ۱×۲ رمز نشده در آورده ایم. با ضرب این ماتریس‌ها در ماتریس A عمل رمز گذاری انجام می‌پذیرد:

| ماتریس سطری رمز شده                       | ماتریس رمز ساز (A)                               | ماتریس سطری رمز نشده                    |
|-------------------------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $= \begin{bmatrix} 9 & 11 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 7 & 5 \end{bmatrix}$   |
| $= \begin{bmatrix} 40 & 60 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 20 & 0 \end{bmatrix}$  |
| $= \begin{bmatrix} 11 & 14 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 8 & 5 \end{bmatrix}$   |
| $= \begin{bmatrix} 8 & 4 \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 12 & 16 \end{bmatrix}$ |

بنابراین رمز شده‌ی عبارت GET HELP توسط ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  به صورت دنباله عددی ۹،۱۱،۴۰،۶۰،۱۱،۱۴،۸،۴ است.

## ۵-۲-۲ رمزگشایی یک عبارت رمز شده

اکنون فردی که گیرنده‌ی دنباله‌ی رمز شده‌ی ۹،۱۱،۴۰،۶۰،۱۱،۱۴،۸،۴ است باید به کمک عمل رمزگشایی به متن اصلی این دنباله دست یابد. برای این منظور لازم است که ماتریس رمزنگار در اختیار این شخص قرار گیرد. با ضرب ماتریس‌های رمز شده‌ی ۱×۲ در وارون ماتریس A، ماتریس‌های رمز نشده ۱×۲ محاسبه می‌شود و

سپس از روی آن و به کمک جدول ابتدایی، عمل رمز گشایی کامل می شود:

برای  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{-4 - (-3)} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

| ماتریس سطری رمز گشایی شده               | وارون ماتریس رمز ساز                              | ماتریس سطری رمز شده                     |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $\begin{bmatrix} 7 & 5 \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 9 & 11 \end{bmatrix}$  |
| $\begin{bmatrix} 20 & 0 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 40 & 60 \end{bmatrix}$ |
| $\begin{bmatrix} 8 & 5 \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 11 & 14 \end{bmatrix}$ |
| $\begin{bmatrix} 12 & 16 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 8 & 4 \end{bmatrix}$   |

در نتیجه دنباله ی رمز گشایی شده ی ۷،۵،۲۰،۰،۸،۵،۱۲،۱۶ حاصل می شود. اکنون با تطبیق با جدول کدهای قراردادی عبارت GET HELP کشف می گردد.

## تمرین های بخش ۲-۵

۱. با استفاده از جدول کدهای قراردادی و ماتریس A داده شده، پیام های زیر را به صورت رمز شده در آورید.

الف) عبارت HAPPY BIRTHDAY و  $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

ب) عبارت SEPIDEH و  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

۲. با استفاده از جدول کدهای قراردادی و معکوس ماتریس A داده شده، پیام های

رمز شده‌ی دنباله‌های عددی داده شده را کشف کنید.

الف)  $1, 1, -34, 23, -46, 33, -58, 22, -41, 39, -1, 4, 30$  و  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ب)  $5, -31, -5, 13, 15, -26, 12, -23, 3, -4$  و  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

## ۲-۶ اعمال سطری مقدماتی

تاکنون با طریقه یافتن وارون ماتریس به کمک ماتریس الحاقی آشنا شده ایم. حال می‌خواهیم وارون یک ماتریس را به روش تحویل سطری بیابیم. برای این منظور در ابتدا با معرفی اعمال سطری مقدماتی می‌پردازیم و سپس روش تحویل سطری جهت یافتن وارون یک ماتریس را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. لازم به ذکر است که اعمال سطری مقدماتی نقش عمده‌ای در حل یک دستگاه معادلات چند مجهولی دارد، که در فصل بعد به آن می‌پردازیم.

### ۲-۶-۱ تعریف

به هر یک از اعمال زیر که روی سطرهای ماتریس  $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$  انجام پذیرد

یک عمل سطری مقدماتی گوئیم:

الف) تعویض جای دو سطر

ب) ضرب یک سطر در عدد غیر صفر

ج) افزودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر

### تذکر ۲-۵

هر ماتریس وارون پذیر را با اعمال سطری مقدماتی می‌توان تبدیل به یک ماتریس همانی نمود.

### ۲-۶-۲ تبدیل یک ماتریس نامنفرد به ماتریس همانی

ماتریس مربعی  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  را در نظر می‌گیریم. اگر  $A$  وارون پذیر باشد، آنگاه در هر

ستون آن حداقل یک درایه نا صفر وجود دارد. (چون اگر تمام درایه‌ها صفر باشد دترمینان آن برابر صفر می شود) برای تبدیل یک ماتریس وارون پذیر به ماتریس همانی مراحل زیر را انجام می دهیم:

**مرحله اول:** اولین درایه غیر صفر ستون اول از سمت چپ را مشخص می کنیم. فرض کنیم که این درایه در سطر  $i$ ام باشد.

**مرحله دوم:** جای سطر  $i$ ام و سطر اول را عوض می کنیم.

**مرحله سوم:** همه درایه‌های این سطر را که اکنون سطر اول است بر اولین درایه‌ی غیر صفر آن تقسیم می کنیم. (اولین درایه سطر اول تبدیل به ۱ می شود که آن را درایه‌ی پیشرو و سطر حاصل که شامل درایه پیشرو است را **سطر لولا نامیم**)

**مرحله چهارم:** با افزودن مضارب مناسبی از سطر لولا به سطرهای دیگر درایه‌های بالا و پایین درایه پیشرو را به صفر تبدیل می کنیم. (زمانی که سطر لولا سطر اول و یا آخر باشد فقط درایه‌های پایین و یا بالای درایه‌ی پیشرو را تبدیل به صفر می کنیم)

دقت کنیم که تا این مرحله در ماتریس به دست آمده از  $A$  اولین درایه از سمت چپ سطر اول عدد ۱ است و درایه‌های زیر آن صفر شده است. هدف ما تبدیل ماتریس داده شده به ماتریس همانی است بنابراین برای ساختن درایه‌ی پیشرو در سطر دوم، مراحل اول تا سوم را تکرار نموده و حال سطر دوم سطر لولا خواهد بود، سپس مرحله چهارم را انجام می دهیم. این کار را به تعداد سطرها تکرار نموده تا ماتریس داده شده به ماتریس همانی تبدیل گردد.

**قرارداد:** برای اختصار در نوشتن اعمال سطری مقدماتی از نمادهای زیر استفاده می کنیم.

$$1. \quad R_j \Leftrightarrow R_i \text{ به معنای تعویض سطر } i \text{ام و سطر } j \text{ام است.}$$

$$2. \quad kR_i \text{ به معنای حاصلضرب سطر } i \text{ام در عدد غیر صفر } k \text{ است.}$$

$$3. \quad R_j \Rightarrow R_i + kR_i \text{ به معنای افزودن } k \text{ برابر سطر } i \text{ام به سطر } j \text{ام است.}$$

#### مثال ۲-۲۱

ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  را با اعمال سطری مقدماتی به یک ماتریس همانی تبدیل

کنید.

(حل)

در ابتدا دقت کنیم که درایه‌ی اول از سمت چپ سطر اول باید عدد ۱ باشد. این امر را می‌توان به دو طریق انجام داد:

تعویض سطر اول با سوم و یا ضرب سطر اول در عدد  $\frac{1}{4}$ .

برای دقت بیشتر در انجام مراحل این مثال، درایه پیشرو در داخل دایره و سطر لولا داخل بیضی مشخص شده‌اند. داریم:

$$A \xrightarrow{R_1 \Leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} = A_1$$

حال به کمک سطر لولا (سطر اول) و با استفاده از اعمال سطری مقدماتی درایه‌های زیر درایه پیشرو را به صفر تبدیل می‌کنیم.

$$A_1 \xrightarrow{-2R_1 + R_2 \Rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4R_1 + R_3 \Rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A_2$$

اکنون در ماتریس  $A_2$  سطر دوم سطر لولا خواهد بود اما ابتدا باید درایه‌ی پیشرو آن عدد ۱ باشد بنابراین این با ضرب کردن سطر دوم در عدد -۱ (یا جابجایی سطر دوم و سوم) سطر لولا ساخته می‌شود.

$$A_2 \xrightarrow{-1 \times R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A_3$$

در ماتریس  $A_3$ ، سطر لولا، سطر دوم است حال درایه‌های بالا و پایین درایه پیشرو را به صفر تبدیل می‌کنیم. در این مثال درایه بالای درایه پیشرو صفر است و فقط کافی است درایه زیر آن را تبدیل به صفر کنیم:

$$A_3 \xrightarrow{-R_2 + R_3 \Rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A_4$$

مانند دو مرحله قبل اکنون نوبت سطر سوم است تا به سطر لولا تبدیل شود و باید

اولین درایه غیر صفر آن عدد ۱ باشد.

$$A_4 \xrightarrow{-1 \times R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_5$$

در مرحله آخر در ماتریس  $A_5$  درایه‌های بالای درایه پیشرو را به صفر تبدیل می‌کنیم.

$$A_5 \xrightarrow{-2R_3 + R_1 \Rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_3 + R_2 \Rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I. \blacksquare$$

## تذکر ۶-۲

ماتریس مربعی  $A$  وارون پذیر است اگر و تنها اگر بتوان آنرا با اعمال سطری مقدماتی به ماتریس همانی تبدیل نمود.

بنابراین با توجه به تذکر بالا ماتریس داده شده در مثال قبل وارون پذیر است. اکنون به بیان روش دیگری برای یافتن وارون یک ماتریس مربعی می‌پردازیم.

## ۶-۲-۳ یافتن وارون یک ماتریس توسط اعمال سطری مقدماتی

فرض کنیم  $A$  یک ماتریس مربعی باشد، ماتریس مرکب  $[A|I]$  را تشکیل می‌دهیم (ماتریس همانی را به ماتریس  $A$  اضافه می‌کنیم) حال اعمال سطری مقدماتی را روی این ماتریس طوری به کار می‌بریم که ماتریس  $A$  به  $I$  تبدیل شود (الگوریتم گفته شده در بخش قبل) دقت کنیم که این اعمال روی کل ماتریس مرکب انجام می‌شود. هدف ما در این جا تبدیل ماتریس  $A$  به  $I$  است. اگر چنین امری محقق شود، ماتریس  $A$  وارون پذیر است و وارون آن همان ماتریس تحویل شده  $I$  است که در پایان از ماتریس مرکب تحویل شده به دست آمده است.

## مثال ۲-۲۲

وارون پذیری ماتریس زیر را به کمک اعمال سطری مقدماتی بررسی کنید.

(حل)

داریم:

$$\begin{aligned}
 [A|I] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-1 \times R_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{-3R_1 + R_2 \Rightarrow R_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-4R_1 + R_3 \Rightarrow R_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{-R_2 + R_3 \Rightarrow R_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right]. \blacksquare
 \end{aligned}$$

دقت کنیم که در مثال بالا پس از چند مرحله استفاده از عملیات سطری پلکانی سطر دوم و سوم برابر شده اند و ما برای کوتاه تر شدن راه حل مضربی از سطر دوم را به سوم اضافه کردیم تا سطر سوم صفر شود و نتیجه بگیریم که امکان تبدیل ماتریس A به I وجود ندارد و بنابراین ماتریس A وارون پذیر نیست.

### مثال ۲-۳۲

وارون ماتریس مثال ۲-۲۱ را بیابید.

(حل)

$$\begin{aligned}
 [A|I] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \Leftrightarrow R_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{-2R_1 + R_2 \Rightarrow R_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-4R_1 + R_3 \Rightarrow R_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{-1 \times R_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_2 + R_3 \Rightarrow R_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -6 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{-1 \times R_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{-2R_3 + R_1 \Rightarrow R_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 6 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-R_3 + R_2 \Rightarrow R_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 6 \end{array} \right]$$

بنابراین وارون ماتریس A برابر است با

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -11 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

### تمرین‌های بخش ۲-۶

وارون پذیری هر یک از ماتریس‌های داده شده را به کمک اعمال سطری مقدماتی بررسی کنید و در صورت وارون پذیری، وارون آن را بیابید.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

## تمرین‌های گوناگون فصل دوم

۱. هرگاه  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، مطلوبست محاسبه  $AA^t$  و  $(A + A^t)^t$ .

۲. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  آنگاه نشان دهید  $A^2 = 3A - 2I$ .

۳. هرگاه  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ، آیا تساوی  $AB = BA$  برقرار است؟

۴. اعمال ماتریسی زیر را انجام دهید:

(الف)  $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  (ب)  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

(ج)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \right]^t$  (د)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

۵. بدون بسط، نشان دهید:

(الف)  $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(ب)  $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \quad (\text{ج})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+a & a^2(b+c) \\ 1 & 1+b & b^2(a+c) \\ 1 & 1+c & c^2(a+b) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{د})$$

۶. با حل معادله‌ی ماتریسی  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  مقادیر  $x, y, z$  را بیابید.

۷. ماتریس غیر صفر  $X$  را طوری بیابید که در معادله‌ی زیر صادق باشد:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۸. ماتریس وارون پذیر  $A$  را متعامد نامیم اگر در شرط زیر صدق کند:

$$AA^t = A^tA = I$$

۹. نشان دهید ماتریس‌های زیر متعامدند:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

۱۰. با توجه به تمرین قبل نشان دهید که دترمینان یک ماتریس متعامد برابر ۱ یا -۱ است.

۱۱. وارون هر یک از ماتریس‌های زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۸ & ۳ & ۵ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۲ \\ ۶ & ۱۰ & ۴ \\ ۴ & ۶ & ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

۱۲. هر گاه داشته باشیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & -۲ \\ ۲ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

مطلوبست تعیین  $A^{-1}$ ,  $A^t$ ,  $AA^t$  و  $A^{-1}A^t$ .

۱۳. به کمک اعمال سطری مقدماتی وارون ماتریس‌های زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \text{ (ب)}$$

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۲ & ۵ \end{bmatrix} \text{ (د)}$$

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۶ \\ ۰ & ۲ & ۶ \end{bmatrix} \text{ (ج)}$$

۱۴. مقدار  $x$  را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} x-۱ & -۲ & ۰ \\ ۰ & x & ۰ \\ ۱ & -۱ & x+۱ \end{vmatrix} = ۰$$

۱۵. به کمک ماتریس رمزساز  $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$  عبارات متنی زیر را به صورت رمز شده در آورید.

ب) YA EMAM REZA

الف) SEE YOU

۱۶. اگر  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$  آنگاه ماتریس A را بیابید.

۱۷. ماتریس همسازه و الحاقی ماتریس‌های زیر را بیابید.

(الف)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  (ب)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$  (ج)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

## فصل ۳

### دستگاه معادلات خطی

#### هدف کلی

هدف کلی این فصل آشنایی دانشجویان با دستگاه معادلات خطی و روش‌های حل آن است.

#### اهداف رفتاری

- دانشجو پس از مطالعه دقیق این فصل باید بتواند:
۱. هر دستگاه معادلات خطی را به صورت یک معادله ماتریسی بنویسد.
  ۲. به کمک ماتریس وارون، جواب یک دستگاه معادلات خطی  $n$  معادله و  $n$  مجهول را در صورت وجود به دست آورد.
  ۳. با استفاده از دستور کرامر، جواب یک دستگاه معادلات خطی  $n$  معادله و  $n$  مجهول را در صورت وجود به دست آورد.
  ۴. تعریف دو دستگاه معادلات خطی هم ارز را بداند و به کمک آن روش حذفی گاوس را برای حل یک دستگاه معادلات خطی  $m$  معادله و  $n$  مجهول به کار گیرد.
  ۵. ماتریس سطری پلکانی را بشناسد و به کمک اعمال سطری مقدماتی یک ماتریس را به شکل یک ماتریس سطری پلکانی تبدیل کند.
  ۶. به کمک ماتریس سطری پلکانی روش گاوس-جردن را در حل یک دستگاه معادلات خطی  $m$  معادله و  $n$  مجهول به کار گیرد.

### مقدمه

در این فصل با استفاده از مفهوم ماتریس و دترمینان دو روش برای حل دسته خاصی از یک دستگاه معادلات خطی  $n$  معادله و  $n$  مجهول ارائه می‌نماییم و سپس یک روش کلی حل یک دستگاه معادلات خطی  $m$  معادله و  $n$  مجهول را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

### ۳-۱ دستگاه معادلات خطی

در ابتدای این بخش به معرفی تعاریف و مقدمات لازم برای حل یک دستگاه معادلات خطی خواهیم پرداخت.

#### ۳-۱-۱ تعریف

معادله‌ای به صورت:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

با  $n$  مجهول  $x_1, x_2, \dots, x_n$  یک معادله‌ی  $n$  مجهولی خطی نامیم.

در معادله‌ی قبل،  $a_1, a_2, \dots, a_n$  و  $b$  اعداد حقیقی ثابت در نظر گرفته می‌شوند. به عنوان مثال  $3 - 2x_2 = x_1 + \sin(x_2)$  یک معادله‌ی دو مجهولی خطی است و معادله‌ی  $2x_1 + \sin(x_2) = 2$  یک معادله‌ی ۲ مجهولی غیرخطی است.

هر  $n$  تایی از اعداد حقیقی به صورت  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  که در معادله‌ی  $n$  مجهولی فوق صدق کند، یک جواب برای آن نامیده می‌شود. بطور مثال  $(3, 0)$  و  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  جواب‌هایی برای معادله‌ی  $3 - 2x_2 = x_1$  هستند.

#### ۳-۱-۲ تعریف

یک دستگاه خطی شامل  $m$  معادله و  $n$  مجهول، دستگاهی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

## دستگاه معادلات خطی ۱۰۵

در دستگاه فوق  $a_{ij}$  ها و  $b_i$  ها اعداد حقیقی هستند. به دستگاه ذکر شده یک دستگاه خطی  $m \times n$  نیز گفته می شود. اگر در دستگاه فوق طرف دوم تمام معادلات صفر باشند دستگاه را **همگن** می نامیم، در غیر این صورت دستگاه را **غیر همگن** می گوئیم.

### مثال ۳-۱

دستگاه های

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 = 4 \end{cases} \quad \text{(ج)} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases} \quad \text{(الف)}$$

به ترتیب مثال هایی از دستگاه های خطی  $2 \times 2$ ،  $3 \times 3$  و  $3 \times 2$  هستند. ■

### ۳-۱-۳ تعریف

یک جواب برای یک دستگاه خطی  $m \times n$  یک  $n$  تایی مرتب مانند  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  از اعداد حقیقی است که در تمام معادلات آن دستگاه صدق کند.

### مثال ۳-۲

با توجه به مفروضات مثال قبل، زوج مرتب  $(1, 2)$  جوابی برای دستگاه الف) است، زیرا با قرار دادن  $x_1 = 1$  و  $x_2 = 2$  در آن داریم:

$$\begin{cases} 1 + 2(2) = 5 \\ 2(1) + 3(2) = 8 \end{cases}$$

همچنین سه تایی مرتب  $(2, 0, 0)$  جوابی برای دستگاه ب) است، زیرا با قرار دادن  $x_1 = 2$ ،  $x_2 = 0$  و  $x_3 = 0$  در معادلات آن داریم:

$$\begin{cases} 2 - 0 + 0 = 2 \\ 2(2) + 0 - 0 = 4 \end{cases}$$

البته دستگاه ب) دارای بی نهایت جواب است، زیرا برای هر عدد حقیقی  $\alpha$  سه تایی مرتب  $(2, \alpha, \alpha)$  جوابی برای آن خواهد بود:

$$\begin{cases} 2 - \alpha + \alpha = 2 \\ 2(2) + \alpha - \alpha = 4 \end{cases}$$

همچنین دستگاه ج) در مثال قبل بدون جواب است. یعنی هیچ دو تایی مرتبی به طور همزمان در تمام معادلات آن صدق نمی کند. ■

### تذکر ۱-۳

روشن است که همواره  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  یک جواب دستگاه همگن است. این جواب صفر، موسوم به جواب بدیهی دستگاه همگن است.

### ۳-۴-۱ تعریف

دستگاهی که دارای هیچ جوابی نباشد، ناسازگار و هردستگاهی که حداقل یک جواب داشته باشد سازگار نامیده می شود.

بنابراین در مثال ۱-۳، دستگاه‌های الف) و ب) هر دو سازگار و دستگاه ج) ناسازگارند.

### ۳-۱-۵ تعریف

مجموعه‌ی تمام جواب‌های یک دستگاه خطی را با  $S$  نمایش می‌دهیم و آن را مجموعه جواب آن دستگاه می‌نامیم.

بدیهی است که هردستگاه ناسازگار دارای مجموعه جواب تهی و هر دستگاه سازگار دارای مجموعه جواب تک عضوی یا بی نهایت عضوی است.

### مثال ۳-۳

با توجه به مثال ۲-۳ برای دستگاه 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$$
، مجموعه جوابی

به صورت  $S = \{(1, 2)\}$  و برای دستگاه 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$
، مجموعه جواب به صورت

$S = \{(2, a, a) : a \in \mathbb{R}\}$  خواهیم داشت. همچنین با توجه به ناسازگار بودن دستگاه

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 = 4 \end{cases} \quad \blacksquare \quad S = \{ \}$$

برای آن داریم

### تذکر ۳-۳

هردستگاه  $m \times n$  می‌توان بصورت یک معادله ماتریسی نمایش داد. درواقع برای دستگاه

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

داریم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

که با فرض  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ،  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$  معادله‌ی ماتریسی فوق به صورت خلاصه‌ی  $AX = B$  نوشته می‌شود.

### ۳-۱-۶ تعریف

هرگاه یک دستگاه خطی  $m \times n$  را به صورت یک دستگاه  $AX = B$  نمایش دهیم به  $A$  ماتریس ضرایب،  $X$  ماتریس مجهولات و  $B$  ماتریس مقادیر معلوم گوییم.

### مثال ۳-۴

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \text{ دستگاه را به صورت یک معادله‌ی ماتریسی بیان کنید.}$$

(حل)

نمایش معادله‌ی ماتریسی دستگاه مورد نظر به صورت

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

است. ■

۳-۲ حل دستگاه معادلات خطی  $n \times n$ 

در این قسمت به بررسی روش‌هایی برای حل یک دستگاه  $n \times n$  خواهیم پرداخت، یعنی دستگاه‌هایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که تعداد معادلات و مجهولات در آن‌ها برابر است. البته روش کلی حل یک دستگاه  $m \times n$  در ادامه‌ی همین فصل مطرح خواهد شد.

مشابه یک دستگاه  $m \times n$  برای هر دستگاه  $n \times n$  نیز سه حالت زیر امکان پذیر است.

۱. دارای یک جواب منحصر بفرد باشد.

۲. دارای بی نهایت جواب باشد.

۳. دارای جواب نباشد.

بطور مثال دستگاه‌های  $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$  و  $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 = -2 \end{cases}$ ،  $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$  ترتیب دارای یک، بی نهایت و صفر جواب هستند. با اندکی تامل درمی‌یابیم که دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه اول غیر صفر و دترمینان ماتریس ضرایب دو دستگاه دیگر هر دو برابر صفر است! البته این رویداد اتفاقی نیست. قضیه‌ی زیر این مطلب را به خوبی بیان می‌کند:

## ۳-۲-۱ قضیه

هر دستگاه  $n \times n$  که دترمینان ماتریس ضرایب آن غیر صفر باشد، دارای جواب یکتاست.

روش‌هایی که در ادامه برای حل یک دستگاه  $n \times n$  مطرح می‌شوند، تنها در مورد دستگاه‌هایی کارایی دارند که دترمینان ماتریس ضرایب آن‌ها غیر صفر باشد.

## ۳-۲-۲ روش وارون ماتریس ضرایب

دستگاه  $n \times n$  را که به صورت معادله‌ی ماتریسی  $AX = B$  نوشته شده است را در نظر می‌گیریم. اگر دترمینان ماتریس  $A$  غیر صفر باشد آنگاه وارون آن وجود دارد. بنابراین با ضرب  $A^{-1}$  از سمت چپ در معادله‌ی ماتریسی دستگاه، داریم:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

اکنون با توجه به تعریف ضرب ماتریسی و تساوی فوق مقادیر مجهول به راحتی به دست می آیند.

### مثال ۳-۵

$$\text{دستگاه} \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases} \text{ را به روش وارون ماتریس ضرایب حل کنید.}$$

(حل)

ابتدا شکل معادله‌ی ماتریسی دستگاه فوق را می نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  و با توجه به این که  $\det(A) = 5 \neq 0$ ، دستگاه مورد نظر دارای

جواب منحصر بفردی است که از معادله‌ی ماتریسی  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  به دست می آید.

ابتدا به محاسبه‌ی  $A^{-1}$  می پردازیم:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پس  $x_1 = 1$  و  $x_2 = 0$ ، یعنی مجموعه جواب دستگاه به صورت  $S = \{(1, 0)\}$  است. ■

### مثال ۳-۶

$$\text{دستگاه} \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 8x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \text{ را حل کنید.}$$

(حل)

ماتریس ضرایب دستگاه موردنظر عبارتست از  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  پس معادله‌ی

ماتریسی دستگاه به صورت  $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  است. با توجه به مثال ۲-۲۳ از فصل دوم، وارون این ماتریس عبارتست از:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -11 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

پس داریم:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -11 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

یعنی سه تایی مرتب  $(2, -1, -1)$  تنها جواب دستگاه فوق است. ■

### ۳-۲-۳ دستور کرامر

یکی دیگر از روش‌های حل یک دستگاه  $n \times n$  در حالتی که دترمینان ماتریس ضرایب آن غیر صفر است، روش استفاده از دستور کرامر است. دستور کرامر نتیجه‌ای از استفاده‌ی روش وارون ماتریس ضرایب است و فرمولی صریح برای یافتن جواب

منحصر بفرد دستگاه ارائه می دهد.

یک دستگاه  $n \times n$  با معادله ی ماتریسی  $AX = B$  را در نظر گیریم. اگر  $\det(A) \neq 0$  باشد، آنگاه دستگاه دارای جوابی منحصر بفرد است. اگر  $A_i$  ماتریسی باشد که از

جایگزین کردن ماتریس ستونی  $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$  در ستون  $i$  ام ماتریس  $A$  به دست آمده است، آنگاه مقدار مجهول  $i$  ام برابر است با:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

یعنی برای  $n$  مجهول  $x_1, x_2, \dots, x_n$  داریم:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}; x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}; \dots; x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

### مثال ۳-۷

$$\text{دستگاه} \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \text{ را حل کنید.}$$

(حل)

معادله ی ماتریسی دستگاه فوق به صورت  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  که در آن  $\det(A) = -5 \neq 0$ . یعنی دستور کرامر در مورد آن کارایی دارد.

$$\text{اما } A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ و } A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ بنابراین:}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-3}{-5} \text{ و } x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-2}{-5}$$

پس مجموعه جواب دستگاه به صورت  $S = \left\{ \left( -\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right) \right\}$  است. ■

## مثال ۳-۸

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

به کمک دستور کرامر دستگاه را حل کنید.

(حل)

 ابتدا به محاسبه‌ی دترمینان ماتریس‌های  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  و  $A_3$  می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 & \text{و} & |A_1| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \\ |A_2| &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -4 & \text{و} & |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -8 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-8}{-4} = 2$$

 پس مجموعه جواب دستگاه مورد نظر به صورت  $S = \{(1, 1, 2)\}$  است. ■

 تمرین‌های بخش ۳-۲ 

۱. دستگاه‌های زیر را به صورت معادله‌ی ماتریسی بنویسید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} & \text{ب)} \quad & \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 = 2 \end{cases} \\ \text{ج)} \quad & \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -5x_2 - 7x_3 = 4 \\ 5x_3 = 1 \end{cases} & \text{د)} \quad & \begin{cases} x - 2y + z + 3w = 1 \\ 2x + 3y - z + 2w = 0 \\ 5x - 7y + 3z - w = -1 \\ 6x - 8y + 2z + 3w = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

۲. دستگاه‌های زیر را به کمک روش وارون ماتریس ضرایب حل کنید.

$$\begin{cases} 2r + s + 2t = -1 \\ 3r + 2t + 2s = -3 \\ r + 2s + 3t = 5 \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ x - 2y + 4z = 4 \\ -x + y - z = 2 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases} \quad (\text{د}) \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۳. دستگاه‌های زیر را به کمک دستور کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ 5x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (\text{د}) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۴. به ازای چه مقداری از  $k$  دستگاه  $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - ky - 2z = -1 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$  دارای جواب یکتا است؟

### ۳-۳ روش‌های کلی حل دستگاه

در بخش قبل به معرفی روش‌های وارون ماتریس ضرایب و دستور کرامر برای حل یک دستگاه  $n \times n$  در حالتی که دترمینان ماتریس ضرایب غیر صفر باشد، پرداختیم. بدیهی است که روش‌های مذکور در حالت کلی جوابگوی حل یک دستگاه خطی نخواهند بود! پس طبیعی است که به دنبال ارائه و معرفی روش‌های کاملتری برای حل یک دستگاه باشیم. برای نیل به این هدف ذکر مقدمات و تعاریف زیر ضروری به نظر می‌رسد.

**۳-۳-۱ تعریف**

اگر  $AX = B$  نمایش ماتریسی یک دستگاه  $m \times n$  باشد، آنگاه ماتریس افزوده‌ی آن را با  $[A | B]$  نمایش می‌دهیم و ماتریسی است که از کنار هم قرار دادن ماتریس ضرایب و ماتریس ستونی مقادیر معلوم به دست می‌آید.

**مثال ۳-۹**

$$\text{ماتریس افزوده دستگاه} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 \end{cases} \text{ را بیابید.}$$

(حل)

$$\text{با توجه به این که } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}, \text{ پس}$$

$$[A | B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 & -5 \end{array} \right]. \quad \blacksquare$$

**مثال ۳-۱۰**

$$\text{دستگاه معادلات خطی با ماتریس افزوده‌ی} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right] \text{ را بیابید.}$$

(حل)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین دستگاهی به صورت زیر داریم:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases} \quad \blacksquare$$

**تعریف ۲-۳-۳**

دو دستگاه معادله خطی  $m \times n$  را هم‌ارز نامیم اگر دارای مجموعه جواب یکسانی باشند.

در فصل قبل و در هنگام محاسبه‌ی وارون یک ماتریس، با اعمال سطری مقدماتی آشنا شدیم، در این قسمت از اعمال سطری مقدماتی به عنوان ابزاری برای ایجاد دستگاه‌های هم‌ارز با یک دستگاه داده شده استفاده می‌کنیم. در واقع با بکار بردن اعمال سطری مقدماتی بر روی ماتریس افزوده‌ی یک دستگاه، همواره ماتریس افزوده‌ی جدیدی تولید می‌کنیم که دستگاه متناظر با آن ماتریس جدید، هم‌ارز با دستگاه اولیه است. در ادامه نخست به معرفی یک مفهوم از بحث ماتریس‌ها می‌پردازیم.

**تعریف ۳-۳-۳**

ماتریس **سطری پلکانی** ماتریسی است که هر سه شرط زیر در آن برقرار باشد :

(الف) اولین درایه غیر صفر در هر سطر (درایه پیشرو) برابر یک باشد.

(ب) سطرهای صفر (در صورت وجود) در پایین ماتریس باشند.

(ج) درایه پیشرو هر سطر سمت راست درایه‌ی پیشرو سطر قبل باشد.

**مثال ۱۱-۳**

ماتریس‌های زیر همگی سطری پلکانی‌اند:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**مثال ۱۲-۳**

ماتریس‌های زیر به صورت سطری پلکانی نیستند:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ماتریس A شرط ج) را ندارد. در ماتریس B شرط ب) برقرار نیست و در C شرط الف) رعایت نشده است.

### ۳-۳-۴ قضیه

هر ماتریس دلخواه را می‌توان با بکار بردن اعمال سطری مقدماتی به یک ماتریس سطری پلکانی تبدیل کرد.

### ۳-۳-۵ یادآوری

اعمال سطری مقدماتی عبارتند از:

- الف) تعویض جای دو سطر
- ب) ضرب یک سطر در عدد غیر صفر
- ج) افزودن مضرب از یک سطر به سطر دیگر

### ۳-۳-۶ مراحل تبدیل یک ماتریس به ماتریس سطری پلکانی

برای تبدیل یک ماتریس دلخواه به یک ماتریس سطری پلکانی، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱. اولین ستون غیر صفر را پیدا می‌کنیم و اولین درایه غیر صفر آن را مشخص کرده و سطر شامل آن را با سطر اول جابجا می‌کنیم.
۲. اکنون تمام درایه‌های سطر اول را به اولین درایه غیر صفر آن تقسیم می‌کنیم تا درایه پیشرو سطر اول برابر یک شود.
۳. با افزودن مضربی مناسب از سطر اول به سطرهای بعدی درایه‌های زیر درایه‌ی پیشرو در سطر اول را به صفر تبدیل می‌کنیم.
۴. سطر اول ماتریس را نادیده می‌گیریم، اکنون ماتریسی داریم که یک سطر کمتر از ماتریس اولیه دارد و اعمال ۱ تا ۳ را در مورد آن ماتریس جدید انجام می‌دهیم تا به یک ماتریس سطری پلکانی برسیم.

## مثال ۳-۱۳

ماتریس 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
 را به کمک اعمال سطری مقدماتی به یک ماتریس سطری پلکانی تبدیل کنید.

(حل)

ابتدا جای سطر اول و دوم را با هم تعویض می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به این که درایه پیشرو سطر اول برابر یک است، تنها کافی است که درایه‌های زیرین آن تبدیل به صفر گردند، برای انجام این کار سطر اول را به عنوان مبنا (سطر لولا) قرار می‌دهیم و دو برابر آن را به سطر سوم، یک برابر آن را به سطر چهارم و منفی یک برابرش را به سطر پنجم می‌افزاییم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

حال سطر اول ماتریس اخیر را نادیده می‌گیریم و دوباره اعمال ۱ تا ۳ را بر روی ماتریس باقیمانده انجام می‌دهیم، یعنی ماتریسی که به صورت زیر است:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

با توجه با این که در اولین ستون غیر صفر در ماتریس جدید ستون سوم است و درایه‌ی غیر صفر آن در سطر اول قرار دارد، پس کافی درایه‌های زیرین آنرا تبدیل به صفر کنیم. برای انجام این کار منفی دو برابر آنرا به سطر دوم، و منفی یک برابرش را به سطرهای سوم و چهارم اضافه می‌کنیم:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

اکنون ماتریس جدیدی به‌صورت زیر داریم:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

با افزودن منفی یک برابر سطر اول به سطر دوم داریم:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \end{array}$$

اکنون ماتریسی به صورت زیر داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

با ضرب  $\frac{-1}{4}$  در سطر بالایی از جدیدترین ماتریس داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

اکنون با افزودن سطر اول به سطر دوم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین با در نظر گرفتن سطرهای بالایی که خارج از ماتریس و در بالای آن نوشته شده‌اند، با ماتریس زیر آن به فرم سطری پلکانی زیر دست یافته ایم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

### ۳-۳-۷ روش حذفی گاوس

در این روش ابتدا ماتریس افزوده‌ی دستگاه داده شده را نوشته و سپس به کمک اعمال سطری مقدماتی آن را به شکل یک ماتریس سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم. در مورد ماتریس افزوده‌ی سطری پلکانی شده، ذکر چند نکته حائز اهمیت است:

الف) اگر سطری از ماتریس به دست آمده به صورت

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

باشد، آنگاه دستگاه داده شده دارای جواب نیست، یعنی با یک دستگاه ناسازگار مواجهیم.

ب) اگر هیچ سطری به صورت  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$  ظاهر نشود، دستگاه مورد نظر سازگار خواهد بود.

ج) اگر دستگاهی سازگار باشد و عناصر پیشرو هر سطر در تمام ستون های ماتریس ضرایب (ماتریس سمت چپ در ماتریس افزوده) قرار داشته باشند، آنگاه دستگاه دارای جواب یکتاست.

د) اگر دستگاهی سازگار باشد و ستونی از ماتریس ضرایب در ماتریس افزوده ی سطری پلکانی فاقد درایه ی پیشرو باشد آنگاه دستگاه بی نهایت جواب دارد.

### مثال ۳-۱۴

الف) اگر ماتریس افزوده ی سطری پلکانی شده ی دستگاهی به صورت  $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$  باشد، با توجه به این سطر دوم به صورت  $[000|1]$  است، دستگاه ناسازگار بوده و بدون جواب است.

ب) اگر ماتریس افزوده ی سطری پلکانی شده ی دستگاهی به صورت  $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 1 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$  باشد، دستگاه مورد نظر سازگار است و با توجه به قرار گرفتن ضرایب پیشرو در هر سه ستون از ماتریس ضرایب در ماتریس افزوده، دستگاه دارای جواب یکتاست.

ج) اگر ماتریس افزوده ی سطری پلکانی شده ی دستگاهی به صورت  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$  باشد، دستگاهی سازگار داریم، اما با توجه که درایه های پیشرو در سطر ها در

### دستگاه معادلات خطی ۱۲۱

تمامی ستونهای ماتریس ضرایب از ماتریس افزوده پخش نشده‌اند، پس دستگاه مورد نظر بی نهایت جواب دارد. ■

### مثال ۳-۱۵

به روش حذفی گاوس، دستگاه  $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$  را حل کنید.

(حل)

ماتریس افزوده‌ی دستگاه فوق به صورت  $\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array} \right]$  است. آن را به یک ماتریس

سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \end{array} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{-2R_1 + R_2 \Rightarrow R_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2 \Rightarrow R_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

اکنون دستگاه متناظر با ماتریس  $\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$  به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

دستگاه به دست آمده هم ارز با دستگاه اولیه بوده و به راحتی قابل حل است. در واقع از معادله‌ی دوم داریم  $x_2 = 0$  و با قرار دادن آن در معادله‌ی بالایی مقدار  $x_1 = 1$  به دست می‌آید، یعنی مجموعه جواب دستگاه به صورت  $S = \{(1, 0)\}$  است. ■

### مثال ۳-۱۶

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_5 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

دستگاه را به روش حذفی گاوس حل کنید.

(حل)

ماتریس افزوده‌ی دستگاه داده شده عبارتست از:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

ماتریس فوق همان ماتریس مثال ۳-۱۳ است که همان‌طور که پیش از این ملاحظه شد، صورت سطری پلکانی آن عبارتست از:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

همان‌طور که می‌بینیم سطر تیره شده در ماتریس فوق به صورت  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$  است و این بدان معنی است که دستگاه داده شده دارای جواب نیست. ■

### مثال ۳-۱۷

$$\begin{cases} 4x + y + z = -1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \text{دستگاه را به روش حذفی گاوس حل کنید.}$$

(حل)

با انجام اعمال سطری مقدماتی بر ماتریس افزوده داریم:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} -2R_1 + R_2 \Rightarrow R_2 \\ -4R_1 + R_3 \Rightarrow R_3 \end{matrix}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1) \times R_2 \Rightarrow R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-R_1+R_2 \Rightarrow R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2} \times R_3 \Rightarrow R_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

اکنون مشاهده می‌کنیم که ماتریس  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$  به فرم سطری پلکانی در آمده است. با نوشتن دستگاه متناظر با آن داریم:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = -2 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

که از معادله‌ی سوم آن مقدار  $z = -\frac{1}{2}$  به دست آمده است و با قرار دادن آن در معادله‌های دیگر داریم  $x = \frac{1}{2}$  و  $y = -\frac{5}{2}$ . بنابراین مجموعه جواب دستگاه داده شده به صورت  $S = \left\{ \left( \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$  است. ■

### مثال ۳-۱۸

دستگاه  $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$  را حل کنید

(حل)

ماتریس افزوده‌ی این دستگاه را به فرم سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{2R_1+R_2 \Rightarrow R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{(-1) \times R_1 \Rightarrow R_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \end{array} \right]$$

پس دستگاهی به صورت زیر داریم:

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + 2X_3 = 1 \\ X_2 - 3X_3 = -6 \end{cases}$$

متغیرهای متناظر با عناصر پیشرو در هر سطر را **متغیرهای پیشرو** و سایر متغیرها را **آزاد** نامیم. بنابراین در اینجا متغیرهای  $X_1$  و  $X_2$  متغیرهای پیشرو به شمار آمده و  $X_3$  متغیر آزاد است. اکنون اگر در دستگاه به دست آمده متغیر آزاد  $X_3$  را برابر عدد دلخواه  $\alpha$  در نظر گیریم داریم:

$$\begin{cases} X_1 - X_2 = 1 - 2\alpha \\ X_2 = 3\alpha - 6 \end{cases}$$

که یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی است و با قرار دادن مقدار  $X_2 = 3\alpha - 6$  در معادله‌ی اول داریم:

$$\begin{aligned} X_1 - (3\alpha - 6) &= 1 - 2\alpha \\ \Rightarrow X_1 &= 1 - 2\alpha + 3\alpha - 6 = \alpha - 5 \end{aligned}$$

بنابراین برای هر انتخاب از  $\alpha$  جوابی به صورت سه تایی مرتب  $(\alpha - 5, 3\alpha - 6, \alpha)$  برای دستگاه مورد نظر داریم. پس با توجه به این که برای  $\alpha$  بی‌نهایت انتخاب داریم (چون  $\alpha$  دلخواه است) دستگاه داده شده دارای بی‌نهایت جواب است. یعنی مجموعه جواب دستگاه به صورت

$$S = \{(\alpha - 5, 3\alpha - 6, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

است. بطور مثال اگر  $\alpha = 0$  باشد  $(-5, -6, 0)$  جوابی از دستگاه است و یا اگر  $\alpha = 2$  اختیار شود، جواب  $(-3, 0, 2)$  برای آن حاصل می‌شود. ■

## مثال ۳-۱۹

دستگاه متناظر با ماتریس افزوده‌ی

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

را حل کنید.

(حل)

با بکارگیری اعمال سطری مقدماتی بر روی ماتریس فوق به ماتریس سطری پلکانی شده ای به صورت

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

دست می‌یابیم. اکنون دستگاه متناظر با ماتریس فوق به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_5 = -3 \end{cases}$$

که در آن متغیرهای مشخص شده‌ی  $x_1, x_2, x_3, x_4$  و پیشرو و متغیرهای  $x_5$  و  $x_4$  به عنوان متغیرهای آزاد نمایان شده‌اند.

از معادله‌ی سوم متغیر  $x_5 = -3$  به دست آمده است، حال اگر  $x_2 = \alpha$  و  $x_4 = \beta$  در نظر گرفته شوند ( $\alpha, \beta$  دو عدد حقیقی اند)، دستگاهی به صورت زیر داریم:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha + x_3 + \beta - 3 = 1 \\ x_3 + \beta - 6 = 0 \end{cases}$$

که از معادله‌ی دوم آن داریم  $x_3 = 6 - \beta$  و با قرار دادن این مقدار در معادله‌ی بالایی داریم  $x_1 = -2 - \alpha$ . بنابراین تمام ۵ تایی‌های مرتب به صورت

$$(-2 - \alpha, \alpha, 6 - \beta, \beta, -3)$$

جواب‌هایی برای دستگاه مورد نظر خواهند بود. ■

## ۳-۳-۸ تعریف

یک ماتریس را **کاهش یافته‌ی سطری پلکانی** نامیم، اگر:

(الف) به فرم سطری پلکانی باشد.

(ب) اولین عنصر غیر صفر در هر سطر تنها عنصر غیر صفر در ستون خود باشد.

در واقع در هر ماتریس کاهش یافته‌ی سطری پلکانی عناصر بالایی عناصر پیشرو را نیز در هر سطر به کمک اعمال سطری مقدماتی به صفر تبدیل می‌کنیم.

## مثال ۳-۲۰

ماتریس‌های زیر همگی به فرم کاهش یافته‌ی سطری پلکانی هستند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## ۳-۳-۹ روش گاوس - جردن

کامل‌ترین روش در حل یک دستگاه معادلات خطی، روش گاوس - جردن است. روش گاوس - جردن مشابهت زیادی با روش گاوس دارد، تنها تفاوت روش گاوس - جردن با روش حذفی گاوس در این است که در اینجا ماتریس افزوده را به یک ماتریس کاهش یافته‌ی سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم.

## مثال ۳-۲۱

به روش گاوس - جردن دستگاه معادلات 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$
 را حل کنید.

(حل)

همان‌طور که در مثال ۳-۱۵ دیدیم ماتریس سطری پلکانی شده از ماتریس ضرایب

### دستگاه معادلات خطی ۱۲۷

به صورت  $\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$  است. اکنون کافی است با افزودن سطر دوم به سطر اول، درایه بالای عنصر پیشرو سطر دوم را به صفر تبدیل کنیم:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 + R_2 \Rightarrow R_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

بنابراین دستگاه متناظر با ماتریس کاهش یافته‌ی سطری پلکانی  $\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$ ، به صورت

است بنابراین  $x_1 = 1$  و  $x_2 = 0$  است و مجموعه جواب دستگاه مورد نظر عبارتست از  $S = \{(1, 0)\}$ . ■

### مثال ۳-۲۲

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

به روش گاوس-جردن دستگاه را حل کنید.

(حل)

ابتدا ماتریس افزوده‌ی این دستگاه را به شکل کاهش یافته‌ی سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-3R_1 + R_2 \Rightarrow R_2 \\ -2R_1 + R_3 \Rightarrow R_3}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{R_2 \Leftrightarrow R_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1) \times R_2 \Rightarrow R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\substack{-2R_2 + R_1 \Rightarrow R_1 \\ 7R_2 + R_3 \Rightarrow R_3}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 + R_1 \Rightarrow R_1 \\ -R_2 + R_3 \Rightarrow R_3}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

اکنون دستگاه متناظر با ماتریس کاهش یافته‌ی سطری پلکانی را تشکیل می‌دهیم، داریم:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم  $x_1 = 3$ ،  $x_2 = -2$  و  $x_3 = 4$  جواب منحصر بفرد دستگاه داده شده است. ■

### مثال ۳-۲۳

دستگاه معادلات  $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$  را به روش گاوس- جردن حل کنید.

(حل)

همان‌طور که در مثال ۳-۱۸ دیدیم، ماتریس افزوده‌ی سطری پلکانی شده‌ی دستگاه داده شده بصورت  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \end{array} \right]$  است. اکنون این ماتریس را به ماتریس کاهش یافته‌ی سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم:

برای انجام این امر کافی است با افزودن سطر دوم به سطر اول درایه قرارگرفته در بالای درایه پیشرو سطر دوم را برابر صفر کنیم:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 + R_2 \Rightarrow R_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \end{array} \right]$$

دستگاه متناظر با ماتریس فوق به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -5 \\ x_2 - 3x_3 = -6 \end{cases}$$

در اینجا نیز همانند روش گاوس به متغیرهای متناظر با ستون‌هایی که دارای درایه پیشرو هستند، متغیر پیشرو و به سایر متغیرها آزاد گفته می‌شود، بنابراین  $x_1$  و  $x_2$  متغیرهای پیشرو می‌باشند و  $x_3$  متغیر آزاد این دستگاه است.

حال اگر  $x_3 = \alpha$  در نظر گرفته شود، داریم:

$$\begin{cases} x_1 - \alpha = -5 \\ x_2 - 3\alpha = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha - 5 \\ x_2 = 3\alpha - 6 \end{cases}$$

پس مقدار متغیرهای  $x_1$  و  $x_2$  بر حسب متغیر آزاد  $x_3$  که آن را برابر  $\alpha$  در نظر گرفتیم،

به دست می‌آیند. بنابراین مجموعه جواب دستگاه مورد نظر به صورت زیر است:

$$S = \{(\alpha - 5, 3\alpha - 6, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

یعنی دستگاه بینهایت جواب دارد. ■

### تذکره ۳-۳

هرگاه پس از انجام اعمال سطری مقدماتی و تبدیل ماتریس افزوده‌ی یک دستگاه به فرم کاهش یافته‌ی سطری پلکانی به صورت  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$  ظاهر گردد، دستگاه مورد نظر دارای جواب نیست.

### مثال ۳-۲۴

$$\text{دستگاه معادلات خطی} \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \\ -x + 2y = -2 \end{cases} \text{ را به روش گاوس-جردن حل کنید.}$$

(حل)

ابتدا ماتریس ضرایب این دستگاه را به فرم کاهش یافته‌ی سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{array} \right] &\xrightarrow{\substack{-R_1 + R_2 \Rightarrow R_2 \\ R_1 + R_3 \Rightarrow R_3}} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{(-\frac{1}{2}) \times R_2 \Rightarrow R_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\substack{-R_2 + R_1 \Rightarrow R_1 \\ -3R_2 + R_3 \Rightarrow R_3}} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{(\frac{1}{5}) \times R_3 \Rightarrow R_3} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

اکنون با توجه به این که ماتریس کاهش یافته‌ی سطری پلکانی از ماتریس افزوده‌ی دستگاه شامل سطر  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  است، دستگاه مورد نظر دارای جواب نیست. ■

### ۳-۳-۱۰ قضیه

دستگاه  $n$  معادله و  $n$  مجهولی همگن دارای یک جواب غیر بدیهی (غیر صفر) است اگر و تنها اگر دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه صفر باشد.

## مثال ۳-۲۵

نشان دهید دستگاه معادلات همگن زیر دارای جواب غیربدیهی است و سپس مجموعه جواب دستگاه را بیابید.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

(حل)

درمیان ماتریس ضرایب را محاسبه می‌کنیم

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 3 - 5 = 0$$

بنابراین ۳-۳-۱۰ دستگاه همگن داده شده جواب غیربدیهی دارد. اکنون به روش گاوس-جردن جواب دستگاه را می‌یابیم. چون دستگاه همگن است، ماتریس کاهش یافته‌ی سطری پلکانی ماتریس افزوده و ضرایب یکسان خواهد بود پس کافی است ماتریس ضرایب را به فرم کاهش یافته‌ی سطری پلکانی تبدیل کنیم.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -2R_1 + R_2 \Rightarrow R_2 \\ -4R_1 + R_3 \Rightarrow R_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\begin{matrix} -1R_2 \\ \div 5 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -2R_2 + R_1 \Rightarrow R_1 \\ 5R_2 + R_3 \Rightarrow R_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

دستگاه متناظر با ماتریس فوق به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{5}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{3}{5}x_3 = 0 \end{cases}$$

### دستگاه معادلات خطی ۱۳۱

بنابراین  $x_3$  متغیر آزاد است و با فرض  $x_3 = \alpha$ ، داریم:

$$x_1 = \frac{-1}{5}\alpha, \quad x_2 = \frac{3}{5}\alpha$$

و در نتیجه مجموعه جواب دستگاه را می توان به صورت زیر نوشت

$$S = \left\{ \left( \frac{-1}{5}\alpha, \frac{3}{5}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}. \quad \blacksquare$$

### مثال ۳-۲۶

دستگاه همگن زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 = 0 \\ 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(حل)

دترمینان ماتریس ضرایب را محاسبه می کنیم:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -15 - 7 = -22 \neq 0$$

بنابر قضیه ۳-۳-۱۰ دستگاه همگن داده شده تنها دارای جواب بدیهی است، یعنی

$$\blacksquare \cdot x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

### ۳-۳-۱۱ قضیه

یک دستگاه  $m$  معادله خطی  $n$  مجهولی همگن همواره دارای یک جواب بدیهی (غیر صفر) است اگر  $m < n$ .

### مثال ۳-۲۷

دستگاه همگن زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(حل)

جواب غیربديهی دستگاه را به روش گاوس- جردن محاسبه می‌کنیم برای این کار ماتریس ضرایب را به فرم ماتریس سطری کاهش پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{-2R_1+R_2 \Rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{-1}{5}R_2} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_1 \Rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

دستگاه متناظر با ماتریس فوق به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

با قرار دادن  $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$  مجموعه جواب دستگاه حاصل می‌شود که عبارتست از:

$$S = \left\{ \left( \frac{1}{5}\alpha, \frac{7}{5}\alpha - 2\beta, \alpha, \beta \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}. \blacksquare$$

### تمرین‌های بخش ۳-۳

۱. کدامیک از ماتریس‌های زیر به فرم سطری پلکانی است و کدامیک به فرم کاهش یافته‌ی سطری پلکانی است؟

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ج)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ب)} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ (ز)} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ه)} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (د)} \end{aligned}$$

### دستگاه معادلات خطی ۱۳۳

۲. در هر قسمت ماتریس‌های افزوده ای داده شده است که به فرم سطری پلکانی است. مشخص کنید که دستگاه متناظر با کدامیک سازگار است و اگر دستگاهی دارای جواب یکتا است آن را حل کنید.

$$\begin{array}{lll} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ (ج)} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ (ب)} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \text{ (الف)} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ (ز)} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ (ه)} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \text{ (د)} \end{array}$$

۳. در هر قسمت ماتریس‌های افزوده ای داده شده است که به فرم کاهش یافته سطری پلکانی است. مجموعه جواب دستگاه متناظر با هر یک را حل کنید.

$$\begin{array}{lll} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ (ج)} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ (ب)} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array} \right] \text{ (الف)} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ (و)} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right] \text{ (ه)} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ (د)} \end{array}$$

۴. هر یک از دستگاه‌های زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ (ج)} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{ (ب)} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ (الف)}$$

$$\begin{cases} x + 3y + z + w = 3 \\ 2x - 2y + z + 2w = 8 \\ x + 11y + 2z + w = 1 \end{cases} \quad \text{ (و)} \quad \begin{cases} 2r + 3s + t = 1 \\ r + s + t = 3 \\ 3r + 4s + 2t = 4 \end{cases} \quad \text{ (ه)} \quad \begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 11x + 2y + z = 14 \end{cases} \quad \text{ (د)}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases} \quad \text{(ح)} \quad \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + 3y - z - w = 2 \\ x - y + 2z + 2w = 3 \\ 2x + 5y - 2z - 2w = 4 \end{cases} \quad \text{(ز)}$$

۵. هریک از دستگاه‌های زیر را به روش گاوس-جردن حل کنید.

$$\begin{cases} x + 3y + z + w = 3 \\ 2x - 2y + z + 2w = 8 \\ 3x + y + 2z + w = -1 \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ 2x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{(الف)}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \quad \text{(د)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{(ج)}$$

۶. مقدار  $k$  را طوری بیابید که دستگاه متناظر با ماتریس افزوده‌ی زیر دارای جواب یکتا باشد.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & k & 3 \end{array} \right]$$

۷. ماتریس افزوده‌ی دستگاهی به‌صورت زیر است:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & k & m \end{array} \right]$$

الف) به ازای چه مقادیری از  $k$  و  $m$  دستگاه موردنظر دارای بی نهایت جواب است؟

ب) به ازای چه مقادیری از  $k$  و  $m$  دستگاه موردنظر ناسازگار است؟

۸. در وجود و جواب دستگاه زیر بحث کنید.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b \\ 5x_2 - x_3 = c \end{cases}$$

۹. به ازای چه مقادیری از  $m$ ، دستگاه زیر دارای جواب منحصر به فرد نیست.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ mx_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

۱۰. نشان دهید دستگاه زیر دارای جواب نیست.

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 15 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 8 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$$



### تمرین‌های گوناگون فصل سوم

۱. دستگاه‌های زیر را به صورت معادله‌ی ماتریسی بنویسید.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + 5y - z = 11 \end{cases} \quad \text{ب)} \quad \begin{cases} 2x - 9y = -3 \\ 5x + \sqrt{2}y = 6 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \\ -x + 6y + 9z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \quad \text{د)} \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 2x_2 = 2 \\ 8x_1 + 5x_3 = 12 \end{cases} \quad \text{ج)}$$

۲. دستگاه‌های زیر را به روش وارون ماتریس ضرایب حل کنید.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{ب)} \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_1 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{(د)} \quad \begin{cases} \frac{x_1}{2} + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{(ج)}$$

۳. دستگاه‌های تمرین قبل را به کمک دستور کرامر حل کنید.

۴. مقدار  $m$  را طوری بیابید که دستگاه

$$\begin{cases} 2x + y - (m-1)z = 0 \\ mx + 5y + z = 8 \\ -x - y + mz = 2 \end{cases}$$

دارای جواب یکتا نباشد.

۵. هر یک از دستگاه‌های زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad \begin{cases} 2x + 7y = -2 \\ -3x - y = 5 \end{cases} \quad \text{(الف)}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9 \\ x_1 + 5x_2 + 12x_3 = 18 \end{cases} \quad \text{(د)} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{(ج)}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 14 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{(و)} \quad \begin{cases} 4x + 5y + z = 18 \\ 6x + 3y + 7z = 9 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \quad \text{(ه)}$$

۶. دستگاه‌های زیر را به روش گاوس-جردن حل کنید.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{(الف)}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 4z - 2w = 0 \\ 2y + 5z + w = 2 \quad (\text{د}) \\ y - 3z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 4y - 6z = 12 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 0 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases} \quad (\text{و}) \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 3 \\ x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \quad (\text{ه})$$

۷. مقدار  $k$  را چنان بیابید که دستگاه

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$$

الف) دارای جواب یکتا باشد.

ب) بدون جواب باشد.

ج) دارای بیش از یک جواب (بی نهایت جواب) باشد.

۸. مقدار  $k$  را طوری بیابید که دستگاه

$$\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

الف) دارای جواب یکتا باشد.

ب) دارای بی نهایت جواب باشد.

۹. شرطی را بر  $a$ ،  $b$  و  $c$  تعیین کنید که دستگاه زیر دارای جواب باشد.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = a \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = b \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = c \end{cases}$$

۱۰. جواب های غیر بدیهی دستگاه های همگن زیر را در صورت وجود، بیابید.

$$\begin{array}{ll}
 \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 3z - 2w = 0 \\ 4x + 2y - z + w = 0 \\ -x + 3y + 2z - 4w = 0 \end{array} \right. & \text{(ب)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 8x_2 + 8x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{array} \right. \text{(الف)} \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 4y - z = 0 \end{array} \right. & \text{(د)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right. \text{(ج)}
 \end{array}$$

۱۱. دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array} \right.$$

۱۲. الف) فرض کنید که دستگاه همگن مربوطه فقط جواب صفر داشته باشد. نشان دهید که دستگاه بالا برای هر مقدار از ثابت‌های  $b_i$  دارای جواب منحصری‌فرد است.  
 ب) فرض کنیم دستگاه همگن مربوطه جواب ناصفر داشته باشد. نشان دهید که ثابت‌هایی چون  $b_i$  وجود دارند که دستگاه مورد نظر به ازای آن‌ها جواب ندارد. همچنین هرگاه این دستگاه جواب داشته باشد، آنگاه بیش از یک جواب دارد.

## فصل ۴

### تبدیلات خطی و مقادیر ویژه

#### هدف کلی

هدف کلی این فصل آشنایی دانشجویان با نگاشت‌های خطی و مقادیر ویژه است.

#### اهداف رفتاری

دانشجو پس از مطالعه دقیق این فصل باید بتواند:

۱. استقلال و وابستگی خطی یک مجموعه از بردارها را بیان کند.
۲. رتبه ماتریس را تعریف نموده و برای هر ماتریس آنرا تعیین کند.
۳. خواص و ویژگی‌های رتبه ماتریس را بیان کرده و در حل مسائل به کار گیرد.
۴. تبدیل خطی (تابع خطی) را تعریف کند و از سایر توابع تشخیص دهد.
۵. ماتریس نمایشگر هر تبدیل خطی را تعیین کند.
۶. اعمال جبری روی تبدیلات خطی را تعریف کرده و در مسائل به کار گیرد.
۷. مقدار و بردار ویژه یک تبدیل خطی را تعریف نماید.
۸. رابطه بین مقدار ویژه و بردار ویژه یک ماتریس و تبدیل آنرا بداند و بتواند آن‌ها را محاسبه کند.

## مقدمه

در این فصل ابتدا فضای برداری  $R^n$  را معرفی نموده و سپس استقلال و وابستگی خطی یک مجموعه از بردارها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در خاتمه فصل با تبدیل خطی آشنا می‌شویم و روش محاسبه مقدار ویژه و بردار ویژه یک تبدیل خطی و ماتریس را ارائه می‌دهیم.

۴-۱ فضای برداری  $R^n$ 

در این بخش به معرفی مفهوم فضای برداری  $n$ -بعدی حقیقی و یک مجموعه‌ی مستقل خطی از بردارها خواهیم پرداخت.

## تعریف ۴-۱-۱

مجموعه‌ی تمام بردارهای  $n$ -بعدی حقیقی را با  $R^n$  نمایش می‌دهیم و آنرا فضای  $n$ -بعدی حقیقی نامیم. بنابراین:

$$R^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, x_2, \dots, x_n \in R \right\}$$

## تذکره ۴-۱

در این فصل برای سهولت در امر نوشتن، بردار  $n$ -بعدی  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  را به صورت  $n$ -تایی مرتب  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  نمایش می‌دهیم. بنابراین فضای  $R^n$  در تعریف فوق را می‌توان

به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in R\}$$

فضای برداری حقیقی  $R^1$  یا  $R$  تشکیل یافته از تمام بردارهای تک بعدی است که روی محور اعداد حقیقی قابل نمایش است. در فضای برداری  $R^1$  هر بردار تنها دارای بعد طولی است.

$$R^1 = \{x : x \in R\}$$

فضای برداری حقیقی  $R^2$ ، شامل بردارهایی با دو بعد طول و عرض است. این فضای برداری را می توان در صفحه اعداد حقیقی نمایش داد :

$$R^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in R\}$$

و نیز فضای برداری حقیقی  $R^3$  تمام بردارهای سه بعدی را شامل می شود. در این فضا هر بردار دارای سه بعد طول، عرض و ارتفاع است:

$$R^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in R\}$$

#### ۴-۲-۱ تعریف

مجموعه  $X = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$  شامل  $m$  بردار فضای  $R^n$  را در نظر گیریم. بردار  $V$  در  $R^n$  را یک ترکیب خطی از اعضای  $X$  نامیم اگر بتوان  $V$  را به صورت

$$V = c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_m V_m$$

نوشت که در آن  $c_m, \dots, c_2, c_1$  اعداد حقیقی هستند.

#### مثال ۴-۱

مجموعه  $X = \{(1, -2), (-1, 3)\}$  شامل دو بردار از فضای  $R^2$  را در نظر گیریم. بردار  $(-1, 5)$  به صورت یک ترکیب خطی از اعضای مجموعه  $X$  است، زیرا :

$$(-1, 5) = 2(1, -2) + 3(-1, 3)$$

#### مثال ۴-۲

نشان دهید بردار  $(5, 4)$  یک ترکیب خطی از بردارهای  $(2, 3)$  و  $(1, 2)$  است.

(حل)

باید اعداد  $c_1$  و  $c_2$  را به گونه ای پیدا کنیم که :

$$c_1(1, 2) + c_2(2, 3) = (5, 4)$$

یا

$$(c_1 + 2c_2, 2c_1 + 3c_2) = (5, 4)$$

بنابراین دستگاه معادلاتی به صورت زیر داریم:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 5 \\ 2c_1 + 3c_2 = 4 \end{cases}$$

که با حل این دستگاه جواب‌های  $c_1 = -7$  و  $c_2 = 6$  به دست می‌آید. بنابراین:

$$(5, 4) = -7(1, 2) + 6(2, 3) \quad \blacksquare$$

### مثال ۳-۴

آیا بردار  $(3, 2, 5)$  یک ترکیب خطی از اعضای مجموعه‌ی  $X = \{(1, 0, -1), (1, 1, 2)\}$  است؟

(حل)

برای پاسخ به این سوال ابتدا معادله‌ای به صورت

$$c_1(1, 0, -1) + c_2(1, 1, 2) = (3, 2, 5)$$

تشکیل می‌دهیم. بنابراین دستگاهی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ c_2 = 2 \\ -c_1 + 2c_2 = 5 \end{cases}$$

از دو معادله‌ی اول این دستگاه داریم  $c_1 = 1$  و  $c_2 = 2$  که این دو مقدار در معادله‌ی سوم دستگاه صدق نمی‌کند. پس دستگاه مورد نظر ناسازگار است و در نتیجه بردار  $(3, 2, 5)$  را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی عناصر  $X$  نوشت.  $\blacksquare$

### تذکره ۲-۴

بردار صفر در  $R^n$  را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از هر مجموعه‌ی ناتهی از بردارهای  $R^n$  نوشت.

### ۳-۱-۴ تعریف

یک مجموعه‌ی متناهی از بردارهای  $R^n$  را وابسته‌ی خطی نامیم اگر بتوان عضوی از این مجموعه را به صورت یک ترکیب خطی از سایر اعضا نوشت.

#### مثال ۴-۴

همان‌طور که در مثال ۴-۳ دیدیم  $(5, 4)$  به‌صورت یک ترکیب خطی از بردارهای  $(1, 2)$  و  $(2, 3)$  است، بنابراین مجموعه‌ی  $\{(1, 2), (2, 3), (5, 4)\}$  وابسته‌ی خطی است. ■

#### تذکر ۴-۳

می‌توان تعریف یک مجموعه‌ی وابسته‌ی خطی از بردارها را به‌صورت زیر نیز نوشت: یک مجموعه‌ی  $X = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$  از برداری  $R^n$  وابسته‌ی خطی است اگر و تنها اگر اعداد حقیقی  $c_1, c_2, \dots, c_m$  که همگی صفر نیستند، وجود داشته باشد بطوریکه:

$$c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_m V_m = (0, 0, \dots, 0)$$

#### مثال ۴-۵

مجموعه‌ی  $\{(2, 0, 2), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$  دارای وابستگی خطی است. زیرا:

$$(2)(2, 0, 2) + (-4)(1, 0, 0) + (-4)(0, 0, 1) = (0, 0, 0). \quad \blacksquare$$

#### تذکر ۴-۴

با توجه به تذکر ۴-۲ هر مجموعه‌ای از بردارهای  $R^n$  شامل بردار صفر، وابسته خطی است.

#### مثال ۴-۶

مجموعه‌ی  $\{(1, 2, 3), (0, 0, 0), (2, 0, 8)\}$  شامل بردار صفر می‌باشد، بنابراین وابسته خطی است. ■

#### ۴-۱-۴ تعریف

یک مجموعه‌ی  $X = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$  از بردارهای  $R^n$  مستقل خطی نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر از تساوی  $c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_m V_m = (0, 0, \dots, 0)$  نتیجه شود که:  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ .

بدیهی است که هر مجموعه‌ای از بردارها که وابسته‌ی خطی نباشد، مستقل خطی است.

#### مثال ۴-۷

نشان دهید مجموعه‌ی  $X = \{(1,1,1), (1,2,1), (1,1,2)\}$  مستقل خطی است.

(حل)

فرض کنیم تساوی

$$c_1(1,1,1) + c_2(1,2,1) + c_3(1,1,2) = (0,0,0)$$

برقرار باشد. نشان می‌دهیم که  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ .

از معادله‌ی فوق دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

با توجه به این که دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه همگن فوق غیر صفر است، پس

تنها جواب این دستگاه سه تایی  $(0,0,0)$  می‌باشد، یعنی  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ . ■

#### تذکره ۴-۵

در بررسی سریع استقلال خطی یک مجموعه از بردارها نکات زیر حائز اهمیت است:

الف) هر مجموعه‌ی تک عضوی از بردارها (که تنها عضو غیر صفر است) مستقل خطی است.

ب) هر زیر مجموعه  $R^n$  با بیش از  $n$  بردار وابسته‌ی خطی است.

ج) در بررسی یک مجموعه‌ی  $n$  عضوی از بردارهای  $R^n$ ، کافی است ماتریسی  $n \times n$  تشکیل دهیم که هر سطر (ستون) آن یکی از بردارهای این مجموعه است. اگر دترمینان این ماتریس صفر باشد، آن مجموعه وابسته خطی و در غیر این صورت مستقل خطی است.

#### مثال ۴-۸

الف) مجموعه‌ی  $\{(1,2,3,4)\}$  در فضای  $R^4$  مستقل خطی است.

ب) مجموعه‌ی  $\{(0,2,1), (1,3,4), (-1,1,2), (2,3,5)\}$  از بردارهای  $R^3$  وابسته‌ی خطی است ■  
در ادامه‌ی این قسمت توسط مفهوم استقلال خطی به هر ماتریس، یک عدد صحیح و نامنفی به نام رتبه‌ی ماتریس نسبت می‌دهیم.

#### ۴-۵-۱ تعریف

رتبه‌ی ماتریس  $A_{m \times n}$  را با  $r(A)$  نمایش می‌دهیم و این عدد برابر است با تعداد سطرها (یا ستونهای) مستقل خطی از ماتریس  $A$ .

#### ۴-۶ تذکر

برای یافتن رتبه‌ی یک ماتریس ابتدا آنرا به فرم سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم. اکنون تعداد سطرها با درایه‌ی پیشرو، همان رتبه‌ی ماتریس است.

#### مثال ۴-۹

$$\text{رتبه‌ی ماتریس } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ را بیابید.}$$

(حل)

برای یافتن رتبه‌ی ماتریس فوق ابتدا با اعمال سطری مقدماتی آنرا به یک ماتریس سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} &\xrightarrow{-R_1 \Rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -2R_1 + R_2 \Rightarrow R_2 \\ R_1 + R_3 \Rightarrow R_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2 \Leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2 \Rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود تعداد سطرها دارای درایه پیشرو برابر ۲ است، بنابراین رتبه‌ی این ماتریس برابر ۲ خواهد بود یعنی  $r(A) = 2$ . ■

## ۶-۱-۴ خواص رتبه‌ی ماتریس

- الف) رتبه‌ی هر ماتریس صفر برابر صفر است.  
 ب) رتبه‌ی هر ماتریس سطری یا ستونی غیر صفر برابر یک است.  
 ج) رتبه‌ی هر ماتریس همانی  $I_n$  برابر  $n$  است.  
 د) فرض کنیم  $A$  یک ماتریس مربعی از مرتبه‌ی  $n$  باشد در این صورت:  
 $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$

و همچنین

- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow r(A) < n$   
 ه) برای هر ماتریس  $m \times n$  مانند  $A$  داریم  $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$   
 و)  $r(A) = r(A^t)$   
 ز)  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$



## تمرین‌های بخش ۴-۱

- کدامیک از مجموعه‌های زیر مستقل خطی است؟  
 الف)  $A = \{(1, 2, 3), (2, 0, 4), (-1, 0, 3)\}$   
 ب)  $B = \{(-2, 0, 3), (4, 0, -6)\}$   
 ج)  $C = \{(1, 0, 1), (2, 0, 1), (3, -1, 0), (1, 0, 5)\}$   
 د)  $D = \{(1, 0, 1), (2, 0, 2), (2, -1, 6), (3, 0, 4)\}$   
 ه)  $E = \{(0, 1, 0)\}$   
 و)  $F = \{(0, 0)\}$
- بردار  $(9, 0, 9)$  را به صورت ترکیب خطی از اعضای مجموعه‌ی زیر بنویسید:  
 $\{(2, 1, 3), (1, 2, 0), (2, 0, 1)\}$
- نشان دهید که بردار  $(1, 2, 3)$  را نمی‌توان به صورت یک ترکیب خطی از اعضای مجموعه‌ی  $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$  نوشت.
- مقدار  $a$  را طوری بیابید که مجموعه‌ی  $\{(1, a, 0), (a, 1, a), (0, a, 1)\}$  از بردارها وابسته‌ی خطی باشد.
- به ازای چه مقادیری از  $a$  مجموعه‌ی  $\{(a, a, 0), (0, a, a), (a, 0, a)\}$  مستقل خطی است؟

۶. رتبه‌ی هر یک از ماتریس‌های داده شده را بیابید.

$$\begin{array}{ll}
 \text{الف)} & A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \text{ب)} & B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\
 \text{ج)} & C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -12 \end{bmatrix} \\
 \text{د)} & D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 \text{و)} & E = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\
 \text{ز)} & F = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{ح)} & G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{ط)} & H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

## ۲-۴ تبدیلات خطی

در این قسمت ابتدا به معرفی تبدیلات خطی می‌پردازیم و در ادامه رابطه‌ی ماتریس‌ها با این تبدیلات را بیان می‌کنیم.

### ۴-۷-۱ تعریف

یک تبدیل خطی  $T$  از فضای برداری  $R^n$  به فضای برداری  $R^m$  نگاشتی به صورت  $T: R^n \rightarrow R^m$  با این خاصیت است که برای هر دو بردار  $X$  و  $Y$  در  $R^n$  و عدد حقیقی  $a$  داشته باشیم:

$$T(aX + Y) = aT(X) + T(Y)$$

در واقع تبدیل خطی  $T: R^n \rightarrow R^m$  بردار  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  از فضای  $R^n$  را به برداری چون  $T(X) = (T_1(X), T_2(X), \dots, T_m(X))$  از فضای  $R^m$  منتقل می‌کند:

$$\begin{aligned}
 T: R^n &\rightarrow R^m \\
 X &\rightarrow T(X) = (T_1(X), T_2(X), \dots, T_m(X))
 \end{aligned}$$

در اینجا به هر یک از توابع  $T_1, T_2, \dots, T_m$  مولفه‌های تبدیل خطی  $T$  گفته می‌شود. مولفه‌های هر تبدیل خطی توابعی از  $R^n$  به  $R$  هستند.

## تذکره ۷-۴

می توان رابطه ی خطی بودن یک تبدیل خطی  $T: R^n \rightarrow R^m$  را به صورت دو شرط مجزای زیر نیز نوشت:

الف) برای هر دو بردار  $X$  و  $Y$  در  $R^n$  داشته باشیم  $T(X+Y) = T(X) + T(Y)$ .

ب) برای هر عدد حقیقی  $a$  و بردار  $X$  داشته باشیم  $T(aX) = aT(X)$ .

## مثال ۱۰-۴

نگاشت  $T: R^2 \rightarrow R^3$  که به صورت :

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1, -x_1)$$

تعریف می شود یک تبدیل خطی است، زیرا برای هر دو بردار  $X = (x_1, x_2)$  و  $Y = (y_1, y_2)$  از فضای  $R^2$  و عدد حقیقی  $a$  داریم:

$$\begin{aligned} T(aX + Y) &= T(a(x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\ &= T(ax_1 + y_1, ax_2 + y_2) \\ &= (ax_1 + y_1 + ax_2 + y_2, 3ax_1 + 3y_1, -ax_1 - y_1) \\ &= (ax_1 + ax_2, 3ax_1, -ax_1) + (y_1 + y_2, 3y_1, -y_1) \\ &= a(x_1 + x_2, 3x_1, -x_1) + (y_1 + y_2, 3y_1, -y_1) \\ &= aT(x_1, x_2) + T(y_1, y_2) \\ &= aT(X) + T(Y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## تذکره ۸-۴

هر تبدیل خطی، بردار صفر را به بردار صفر منتقل می کند.

نشان دهید که نگاشت  $T: R^3 \rightarrow R^2$  با ضابطه ی  $T(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_1, x_2)$  یک تبدیل خطی نیست.

(حل)

اگر  $T$  یک تبدیل خطی باشد، بایستی که بردار صفر  $(0, 0, 0)$  را به بردار صفر  $(0, 0)$  منتقل کند، اما داریم :

$$T(0, 0, 0) = (1 + 0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$$

بنابراین نگاشت  $T$  یک تبدیل خطی نیست.  $\blacksquare$

۸-۱-۴ تعریف

تبدیل خطی  $I: R^n \rightarrow R^n$  که به صورت :

$$I(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

تعریف می شود، تبدیل همانی نامیده می شود.

در واقع تبدیل همانی، هر بردار از فضای  $R^n$  را به خودش تصویر می کند.

۹-۱-۴ تعریف

تبدیل خطی  $O: R^n \rightarrow R^m$  که به صورت:

$$O(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

تعریف می شود، تبدیل صفر نامیده می شود.

بدیهی است که تبدیل صفر  $O: R^n \rightarrow R^m$  هر بردار  $n$  بعدی در فضای  $R^n$  را به بردار صفر  $m$  بعدی تبدیل می کند.

۱۰-۱-۴ قضیه

نگاشت  $T: R^n \rightarrow R^m$  یک تبدیل خطی است اگر و تنها اگر برای هر  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  در  $R^n$  توابع مولفه ای  $T_1, T_2, \dots, T_m$  به صورت یک ترکیب خطی از  $x_1, x_2, \dots, x_n$  باشند.

قضیه قبل بیان می کند که برای هر تبدیل خطی

$$T: R^n \rightarrow R^m$$

$$X \rightarrow T(X) = (T_1(X), T_2(X), \dots, T_m(X))$$

داریم:

$$T_1(X) = T_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

$$T_2(X) = T_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n$$

$\vdots$

$\vdots$

$$T_m(X) = T_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n$$

اکنون اگر دوباره به همان نمایش ستونی بردار ها بازگردیم، داریم:

$$T(X) = \begin{bmatrix} T_1(X) \\ T_2(X) \\ \vdots \\ T_m(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

بنابراین اگر

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

آنگاه تبدیل خطی  $T: R^n \rightarrow R^m$  را می‌توان به صورت  $T(X) = AX$  نمایش داد.

#### ۴-۱-۱۱ تعریف

اگر تبدیل خطی  $T: R^n \rightarrow R^m$  را به صورت  $T(X) = AX$  نمایش دهیم، به ماتریس  $A$  ماتریس نمایشگر تبدیل خطی  $T$  گوئیم.

واضح است که ماتریس نمایشگر تبدیل خطی  $T: R^n \rightarrow R^m$  یک ماتریس  $m \times n$  است.

#### مثال ۴-۱۲

ماتریس نمایشگر تبدیل خطی  $T: R^2 \rightarrow R^2$  که به صورت

$$T(x_1, x_2) = (5x_1 - 2x_2, 2x_1 + 3x_2)$$

تعریف می‌شود، را تعیین کنید.

(حل)

در این جا توابع مولفه‌ای این تبدیل خطی به صورت زیرند:

$$T_1(x_1, x_2) = 5x_1 + (-2)x_2$$

$$T_2(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

بنابراین ماتریس نمایشگر این تبدیل خطی برابر است با  $\blacksquare \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

#### مثال ۴-۱۳

ماتریس نمایشگر تبدیل خطی  $T: R^3 \rightarrow R^2$  را که به صورت  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, -2x_2 + 3x_3)$  تعریف می شود را بیابید.

(حل)

توابع مولفه‌ای این تبدیل خطی به صورت زیر هستند:

$$T_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 = (1)x_1 + (0)x_2 + (1)x_3$$

$$T_2(x_1, x_2, x_3) = -2x_2 + 3x_3 = (0)x_1 + (-2)x_2 + (3)x_3$$

بنابراین ماتریس نمایشگر این تبدیل خطی عبارتست از  $\blacksquare \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

#### مثال ۴-۱۴

اگر ماتریس نمایشگر یک تبدیل خطی به صورت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

باشد، این تبدیل خطی را مشخص کنید.

(حل)

با توجه به این که  $A$  یک ماتریس  $4 \times 3$  است، پس با یک تبدیل خطی  $T: R^3 \rightarrow R^4$  مواجهیم. برای مشخص شدن این تبدیل خطی کافی است که ماتریس نمایش آن را در

بردارستونی  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  ضرب کنیم. داریم:

$$T(X) = AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 \\ -2x_1 + x_3 \\ 5x_3 \end{bmatrix}$$

بنابراین تبدیل خطی مورد نظر به صورت  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  است که در آن:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 + 3x_2, -2x_1 + x_3, 5x_3). \blacksquare$$

#### ۴-۱-۱۲ تعریف

فرض کنیم  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک تبدیل خطی با ماتریس نمایشگر  $A$  باشد. اگر  $A$  وارون پذیر باشد، آنگاه وارون تبدیل خطی  $T$  وجود دارد و آن را با  $T^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  نمایش می‌دهیم که در آن:

$$T^{-1}(X) = A^{-1}X$$

#### مثال ۴-۱۵

وارون تبدیل خطی مثال ۴-۱۳ را در صورت وجود بیابید.

(حل)

با توجه به این که ماتریس نمایشگر تبدیل خطی مورد نظر به صورت  $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  است و یک ماتریس وارون پذیر می‌باشد، بنابراین  $T^{-1}$  وجود دارد و عبارتست از:

$$T^{-1}(X) = A^{-1}X$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} \\ &\blacksquare. T^{-1}(x_1, x_2) = \left( \frac{3}{19}x_1 + \frac{2}{19}x_2, \frac{-2}{19}x_1 + \frac{5}{19}x_2 \right) \end{aligned}$$

تمرین‌های بخش ۴-۲ 

۱. کدامیک از نگاشت‌های زیر یک تبدیل خطی است؟

$$\begin{array}{ll} F: R^2 \rightarrow R & F(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad (\text{الف}) \\ G: R^2 \rightarrow R^3 & G(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1, 0) \quad (\text{ب}) \\ H: R^2 \rightarrow R^2 & H(x_1, x_2) = (|x_1|, x_2) \quad (\text{ج}) \\ J: R^3 \rightarrow R^2 & J(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2, \frac{x_2 + 2x_3}{3}) \quad (\text{د}) \end{array}$$

۲. در هر قسمت ماتریس نمایشگر تبدیل خطی مورد نظر را بیابید.

$$\begin{array}{ll} T: R^3 \rightarrow R^3 & T(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1) \quad (\text{الف}) \\ T: R^2 \rightarrow R^4 & T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0, x_1 - x_2, 0) \quad (\text{ب}) \\ T: R \rightarrow R^3 & T(x) = (-x, \frac{2x}{3}, 0) \quad (\text{ج}) \end{array}$$

۳. تبدیل خطی متناظر با ماتریس‌های نمایشگر داده شده را بیابید.

$$\begin{array}{ll} A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & (\text{ج}) \quad A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & (\text{و}) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ه}) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \end{array}$$

۴. هرگاه  $T$  و  $S$  تبدیل‌هایی از  $R^3$  به  $R^2$  باشند بطوری‌که:

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= (2x_1 + x_2, 3x_3) \\ S(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}$$

آنگاه تبدیل‌های  $T + 2S$  و  $-2T + \frac{S}{4}$  را بیابید.

۵. وارون تبدیلات خطی زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\begin{array}{ll} T: R^2 \rightarrow R^2 & T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + x_2) \quad (\text{الف}) \\ T: R^3 \rightarrow R^3 & T(x, y, z) = (2x + 2y - 11z, x - 4z, -x - y + 6z) \quad (\text{ب}) \end{array}$$

## ۳-۴ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

در این بخش به معرفی و بررسی مفهوم مقدار ویژه و بردار ویژه برای یک تبدیل خطی و یک ماتریس می‌پردازیم.

## ۱-۴-۱۳ تعریف

فرض کنیم  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک تبدیل خطی باشد. عدد حقیقی  $\lambda$  را یک مقدار ویژه  $T$  نامیم اگر بردار ناصفری چون  $X$  در  $\mathbb{R}^n$  موجود باشد به طوری که  $T(X) = \lambda X$ . در این صورت هر بردار ناصفر صادق در این رابطه را یک بردار ویژه  $T$  متعلق به مقدار ویژه  $\lambda$  نامیم.

## تذکره ۹-۴

اگر  $X$  یک بردار ویژه متعلق به مقدار ویژه  $\lambda$  برای تبدیل خطی  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  باشد، آنگاه هر مضرب اسکالر  $kX$  از این بردار نیز یک بردار ویژه است، زیرا:

$$T(kX) = kT(X) = k(\lambda X) = \lambda(kX)$$

## مثال ۱۶-۴

تبدیل خطی همانی  $I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  را در نظر می‌گیریم. در این صورت برای هر بردار  $X$  در  $\mathbb{R}^n$  داریم:

$$I(X) = X = 1X$$

بنابراین  $\lambda = 1$  یک مقدار ویژه  $I$  است و هر بردار در  $\mathbb{R}^n$  یک بردار ویژه متعلق به  $\lambda = 1$  است. ■

## مثال ۱۷-۴

تبدیل خطی  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  با ضابطه  $T(x_1, x_2) = (3x_2, 2x_1 - x_2)$  را در نظر می‌گیریم. اکنون برای بردارهای  $(3, 2)$  و  $(1, -1)$  داریم:

$$T(3, 2) = (6, 4) = 2(3, 2) \quad \text{و} \quad T(1, -1) = (-3, 3) = -3(1, -1)$$

بنابراین  $\lambda = 2$  و  $\lambda = -3$  دو مقدار ویژه‌ی  $T$  هستند و  $(3, 2)$  بردار ویژه‌ای متناظر با  $\lambda = 2$  و  $(1, -1)$  بردار ویژه‌ای متناظر با مقدار  $\lambda = -3$  است. بدیهی است که هر مضربی از این بردارهای ویژه باز هم بردار ویژه‌ای وابسته به مقادیر ویژه‌ی یافته شده است. ■

در ادامه‌ی بحث ابتدا بحث مقادیر ویژه را در مورد ماتریس‌های مربعی مطرح می‌کنیم و سپس به کمک ماتریس نمایشگر تبدیل خطی  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  قادر خواهیم بود که مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی یک تبدیل خطی را به دست آوریم.

#### تعریف ۱۴-۱-۴

فرض کنیم که  $A$  یک ماتریس مربعی از مرتبه‌ی  $n$  باشد، در این صورت نگاشت  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  که با ضابطه‌ی  $T(X) = AX$  تعریف می‌شود، یک تبدیل خطی است. اکنون مقدار ویژه‌ی ماتریس  $A$  همان مقدار ویژه‌ی تبدیل خطی  $T$  تعریف می‌شود.

به عبارت دیگر عدد حقیقی  $\lambda$  مقدار ویژه‌ی  $A$  است اگر به ازای یک بردار ناصفر  $X$  از  $\mathbb{R}^n$  داشته باشیم:

$$AX = \lambda X$$

و در این حالت  $X$  بردار ویژه‌ی  $A$  متعلق به  $\lambda$  نامیده می‌شود.

#### مثال ۱۸-۴

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ناصفر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  را بیابید.

(حل)

ابتدا معادله‌ی  $AX = \lambda X$  را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

یعنی:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

که در واقع دستگاه همگن زیر را داریم:

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + (\lambda - 2)x_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

اکنون دقت کنیم که دستگاه همگن دارای جواب غیر بدیهی است اگر و تنها اگر دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر باشد، بنابراین:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

بنابراین  $\lambda = -1$  و  $\lambda = 4$  مقادیر ویژه‌ی ماتریس A هستند.

اکنون با قرار دادن  $\lambda = 4$  در دستگاه (\*) داریم:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

دستگاه یافت شده دارای بی نهایت جواب غیر صفر است. به عنوان مثال  $x_1 = 2$  و

$x_2 = 3$  جوابی از دستگاه مورد نظر است، پس بردار  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  یک بردار ویژه‌ی ناصفر

وابسته به مقدار ویژه  $\lambda = 4$  است و هر بردار ویژه‌ی متعلق به  $\lambda = 4$  مضربی از بردار  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  می‌باشد.

به همین طریق برای یافتن بردارهای ویژه وابسته به  $\lambda = -1$ ، با قرار دادن این مقدار در دستگاه (\*) داریم:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

که دستگاه فوق نیز دارای بی نهایت جواب غیر صفر است، به عنوان مثال  $x_1 = 1$  و

$x_2 = -1$  جوابی برای آن است، پس بردار  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  یک بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه‌ی

$\lambda = -1$  می‌باشد و هر بردار دیگر متعلق به  $\lambda = -1$  مضربی از این بردار خواهد بود. ■

#### تذکره ۴-۱۰

می‌توان مجموعه عملیات صورت گرفته در مثال فوق را به شکل روش کلی زیر توسعه داد، به این ترتیب که:

برای یافتن مقادیر ویژه ی ماتریس مربعی از مرتبه ی  $n$  مانند  $A$ ، ابتدا معادله ی  $AX = \lambda X$  را تشکیل می دهیم. از این معادله داریم:

$$(\lambda I - A)X = O$$

(که در آن  $I$  ماتریس همانی از مرتبه ی  $n$  و  $O$  ماتریس ستونی صفر  $n \times 1$  است) حال چون معادله ی فوق دارای جواب ناصفری چون  $X$  است، پس:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

تساوی فوق یک معادله بر حسب  $\lambda$  است که به آن معادله ی ویژه ی ماتریس  $A$  گوئیم. باحل این چند جمله ای، مقادیر ویژه ی ماتریس  $A$  محاسبه می شوند. همچنین به چند جمله ای  $p(x) = \det(xI - A)$  چند جمله ای ویژه ی (مشخصه) ماتریس  $A$  گفته می شود.

## مثال ۴-۱۹

مقادیر ویژه ی ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$  را بیابید.

(حل)

ابتدا ماتریس  $\lambda I - A$  را تشکیل می دهیم:

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ -3 & \lambda+5 & -3 \\ -6 & 6 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

بنابراین معادله ی ویژه ی ماتریس  $A$  عبارتست از:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ -3 & \lambda+5 & -3 \\ -6 & 6 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2 (\lambda-4) = 0$$

یعنی:

که دارای جواب های  $\lambda = -2$  و  $\lambda = 4$  به عنوان مقادیر ویژه ی ماتریس  $A$  است. ■

## ۴-۱۵ قضیه

اگر  $A$  یک ماتریس  $2 \times 2$  باشد آنگاه چند جمله ی مشخصه ماتریس  $A$  برابر است با:

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

(اثبات)

فرض کنید  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$  آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

مثال ۴-۲۰

مقادیر ویژه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  را به دست آورید.

(حل)

با توجه به قضیه قبل معادله مشخصه ماتریس داده شده را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

بنابراین مقادیر ویژه که همان ریشه های چند جمله ای مشخصه هستند عبارتند از  $\lambda = 1$  و  $\lambda = 2$ .  $\blacksquare$

مثال ۴-۲۱

مقادیر ویژه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$  را به دست آورید.

(حل)

معادله مشخصه ماتریس  $A$  با توجه به قضیه ۴-۳-۳ برابر است با  $\lambda^2 + 1 = 0$  که این معادله دارای ریشه حقیقی نیست و در این حالت می گوییم این ماتریس مقدار ویژه حقیقی ندارد.  $\blacksquare$

مثال ۴-۲۲

مقادیر ویژه ی تبدیل خطی  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  که به صورت:  $T(x, y) = (3x + 3y, x + 5y)$  تعریف می شود، را بیابید.

(حل)

ماتریس نمایشگر این تبدیل خطی عبارتست از:  $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

با توجه به قضیه ۴-۳-۳ معادله‌ی ویژه‌ی ماتریس فوق عبارتست از:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از  $\lambda = 2$  و  $\lambda = 6$  که همین اعداد دقیقاً مقادیر ویژه‌ی تبدیل خطی مورد نظر هستند. ■

## تذکره ۴-۱۱

چند ویژگی بردار ویژه و مقدار ویژه عبارتند از:

۱. اگر  $\lambda$  مقدار ویژه ماتریس  $A$  باشد آنگاه  $\lambda^2$  مقدار ویژه ماتریس  $A^2$  است.
۲. اگر  $\lambda$  مقدار ویژه ماتریس معکوس پذیر  $A$  باشد آنگاه  $\lambda^{-1}$  مقدار ویژه ماتریس  $A^{-1}$  است.
۳. اگر  $\lambda$  مقدار ویژه ماتریس مربعی  $A$  باشد آنگاه  $c\lambda$  مقدار ویژه ماتریس  $cA$  است که در آن  $c$  یک اسکالر است.
۴. اگر  $x$  بردار ویژه ماتریس مربعی  $A$  باشد آنگاه  $cx$  نیز بردار ویژه ماتریس  $A$  است که در آن  $c$  یک اسکالر است.

### تمرین‌های بخش ۴-۳

۱. در هر قسمت مقادیر ویژه و بردار ویژه‌های ماتریس داده شده را در صورت وجود بیابید.

$$\begin{aligned}
 & \text{الف) } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ب) } B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ج) } C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{د) } D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \text{ه) } E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ز) } F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ح) } G = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{و) } H = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

۲. در هر قسمت مقادیر ویژه و بردار ویژه‌های تبدیل خطی داده شده را در صورت وجود بیابید.

الف)  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  با ضابطه  $T(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, x_2)$

ب)  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  با ضابطه  $T(x_1, x_2) = (-2x_1 - 3x_2, x_1 + x_2)$

ج)  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  با ضابطه  $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$

د)  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  با ضابطه  $T(x, y, z) = (x + 3y, -2x + 2y - z, 4x - 2z)$

ه)  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  با ضابطه  $T(x, y, z) = (3x, 2y - 5z, y - 2z)$

و)  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  با ضابطه  $T(x, y, z) = (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z)$

۳. فرض کنیم  $\lambda = 2$  مقدار ویژه‌ی ماتریس  $A$  باشد. در این صورت مقدار ویژه‌ی ماتریس‌های  $2A^2$  و  $3A^{-1}$  را بیابید.

## فصل ۵

### توابع چند متغیره و مشتقات جزئی

#### هدف کلی

هدف کلی این فصل آشنایی دانشجویان با مفهوم توابع چند متغیره، حد و پیوستگی و به خصوص عمل مشتق‌گیری از این توابع و به‌کاربردن آن در بهینه‌سازی مسائل مربوط به بحث اقتصاد و مدیریت است.

#### اهداف رفتاری

دانشجو پس از مطالعه دقیق این فصل باید بتواند:

۱. توابع چند متغیره را تعریف کرده و قلمرو آن‌ها را تعیین کند.
۲. حد توابع چند متغیره را تعریف کرده و در مورد وجود و یا عدم وجود حد تابع داده شده بحث و بررسی کند.
۳. پیوستگی توابع چند متغیره را تعریف کرده و در مورد پیوستگی تابع داده شده در هر نقطه از دامنه، تحقیق و بررسی کند.
۴. مفهوم مشتق جزئی را برای توابع چند متغیره بیان کند.
۵. مشتق جزئی مرتبه اول و دوم هر تابع چند متغیره مشتق‌پذیر را محاسبه کند.
۶. دیفرانسیل کل توابع چند متغیره را تعریف کرده و در صورت وجود آن را محاسبه کند.
۷. قاعده زنجیره‌ای در مشتق‌گیری برای توابع چند متغیره را بیان کرده و از آن در محاسبه مشتق‌های جزئی توابع مرکب استفاده کند.
۸. با استفاده از مشتق ضمنی، مشتقات جزئی توابع غیرصریح را محاسبه کند.

۹. با چند کاربرد از مشتقات جزئی در علم بازرگانی و اقتصاد آشنا باشد.
۱۰. اکستریم‌های نسبی توابع چند متغیره بدون محدودیت را تعریف کرده و مقادیر آنها را در صورت وجود برای توابع داده شده محاسبه کند.
۱۱. اکستریم‌های نسبی توابع چند متغیره مقید را تعریف کرده و مقادیر آنها را در صورت وجود برای توابع داده شده به کمک روش ضرایب لاگرانژ به دست آورد.

## مقدمه

توابعی که تاکنون با آن‌ها آشنا شده‌ایم، همگی برحسب تنها یک متغیر مستقل بودند. یعنی در بررسی تابع  $f(x)$ ، تغییرات تابع  $f$  وابسته به تغییرات تنها یک متغیر مستقل  $x$  است. اما بسیاری از توابع در اقتصاد و مدیریت، به بیش از یک متغیر وابسته اند. به طور مثال تابع تقاضای یک کالا، نه تنها به قیمت خود آن بلکه به کالاهای مرتبط و میزان درآمد مصرف کننده نیز وابسته است. در این فصل به بررسی مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل برای توابع دو متغیره و سه متغیره می‌پردازیم.

## ۵-۱- توابع چند متغیره

فرمول‌های آشنای زیادی را می‌توان یافت که در آن‌ها یک متغیر برحسب دو یا چند متغیر قابل محاسبه است. به طور مثال مساحت  $A$  از یک مثلث دلخواه وابسته به اندازه‌ی قاعده‌ی  $b$  و ارتفاع  $h$  است، که از فرمول  $A = \frac{1}{2}bh$  به دست می‌آید. همچنین حجم  $V$  از یک مکعب مستطیل با طول  $l$ ، عرض  $w$  و ارتفاع  $h$  توسط فرمول  $V = lwh$  قابل محاسبه است و نیز میانگین حسابی  $\bar{x}$  از  $n$  عدد  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، وابسته به این اعداد است که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

بنابراین می‌توان گفت که:

-  $A$  تابعی از دو متغیر  $b$  و  $h$  است.

-  $V$  تابعی از سه متغیر  $l, w, h$  است.

-  $\bar{x}$  تابعی از  $n$  متغیر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  است.

نحوه نمایش تابع دو متغیره شبیه نمایش تابع یک متغیره است، به طور مثال عبارت  $Z = f(x, y)$  به این معنی است که  $Z$  تابعی برحسب متغیرهای  $x$  و  $y$  است و همچنین عبارت  $w = f(x, y, z)$  متغیر  $w$  را به صورت تابعی از سه متغیر  $x, y, z$  نمایش می‌دهد و در حالت کلی  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  نمایش وابستگی متغیر  $u$  به  $n$  متغیر مستقل  $x_1, x_2, \dots, x_n$  است.

همان‌طور که پیش از این دیده ایم، دامنه‌ی یک تابع حقیقی زیر مجموعه‌ای از خط حقیقی

یعنی  $R$  است، پس اگر  $f(x)$  یک تابع حقیقی با دامنه  $D$  باشد، آنگاه :

$$f : D \subseteq R \rightarrow R$$

دامنه  $y$  یک تابع دو متغیره  $f(x, y)$  حقیقی زیر مجموعه  $xy$  از صفحه  $xy$  است، یعنی اگر  $f(x, y)$  تابعی دو متغیره با دامنه  $D$  باشد، آنگاه:

$$f : D \subseteq R^2 \rightarrow R$$

و نیز دامنه  $y$  یک تابع سه متغیره حقیقی زیر مجموعه  $xyz$  از فضای سه بعدی حقیقی است، بنابراین برای تابع سه متغیره  $f(x, y, z)$  با دامنه  $D$  داریم:

$$f : D \subseteq R^3 \rightarrow R$$

خلاصه  $y$  مطالب ذکر شده در بالا را می توان به صورت تعریف های زیر نوشت:

#### ۱-۱-۵ تعریف

یک تابع  $f$  بر حسب دو متغیر  $x$  و  $y$  قانونی است که به هر عضو  $(x, y)$  از مجموعه  $D$  در  $R^2$  عدد حقیقی یکتای  $f(x, y)$  را نسبت می دهد، یعنی:

$$f : D \subseteq R^2 \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y)$$

#### ۲-۱-۵ تعریف

یک تابع  $f$  بر حسب سه متغیر  $x, y, z$  و  $z$  قانونی است که به هر عضو  $(x, y, z)$  از مجموعه  $D$  در  $R^3$  عدد حقیقی یکتای  $f(x, y, z)$  را نسبت می دهد، یعنی:

$$f : D \subseteq R^3 \rightarrow R$$

$$(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$$

#### مثال ۱-۵

اگر  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  آنگاه مقدار  $f(1, 0)$  را بیابید و دامنه  $y$  این تابع را مشخص کنید.

(حل)

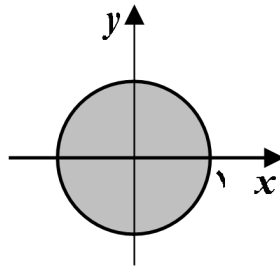
با قرار دادن  $x = 1$  و  $y = 0$  در ضابطه  $y$  تابع داریم:

$$f(1,0) = \sqrt{1-1^2-0^2} = \sqrt{1-1} = 0$$

دامنه‌ی تابع مورد نظر عبارتست از:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-x^2-y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

که همان‌طور که در شکل زیر دیده می‌شود، دامنه‌ی تابع مورد نظر درون و مرز دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع واحد است. ■



#### مثال ۵-۲

اگر  $f(x,y) = \sqrt{y+1} + \ln(x^2-y)$  آنگاه مقدار  $f(e,0)$  را یافته و دامنه‌ی این تابع را مشخص کنید.

(حل)

با جایگذاری داریم:

$$f(e,0) = \sqrt{0+1} + \ln(e^2-0) = \sqrt{1} + \ln(e^2) = 1+2=3$$

برای یافتن دامنه‌ی  $f(x,y)$  ابتدا دقت کنیم که :

$$D_f = D_{\sqrt{y+1}} \cap D_{\ln(x^2-y)}$$

اما:

$$D_{\sqrt{y+1}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y+1 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y\}$$

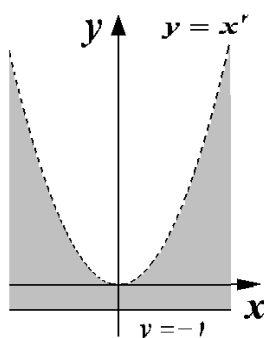
و نیز

$$D_{\ln(x^2-y)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-y > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$$

بنابراین داریم:

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y < x^2\}$$

در شکل بعد دامنه‌ی این تابع نمایش داده شده است. ■



### مثال ۳-۵

اگر  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ، آنگاه مقدار  $f(-1, 1, 2)$  را بیابید و دامنه‌ی تابع موردنظر را مشخص کنید.

(حل)

با جایگذاری داریم:

$$f(-1, 1, 2) = (-1)^2 + 1^2 + 2^2 = 1 + 1 + 4 = 6$$

برای مشخص کردن دامنه‌ی این تابع دقت کنیم توابع چندجمله‌ای همواره تعریف شده اند، پس دامنه‌ی این تابع برابر با تمام نقاط فضای سه بعدی حقیقی است. یعنی:

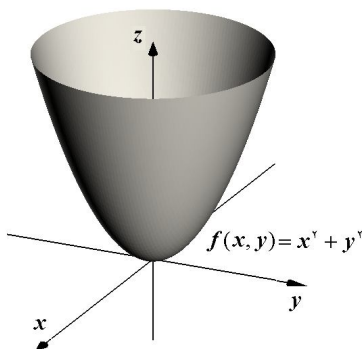
$$\blacksquare. D_f = \mathbb{R}^3$$

### تذکره ۱-۵

همان‌طور که تاکنون دیده‌ایم نمودار یک تابع یک متغیره در فضای دو بعدی نمایش داده می‌شود، در این جا نیز برای رسم نمودار یک تابع دو متغیره به فضای سه بعدی نیاز داریم.

### مثال ۴-۵

در شکل بعد نمودار تابع دو متغیره‌ی  $f(x, y) = x^2 + y^2$  رسم شده است که به آن سهمیگون گفته می‌شود:



### تمرین های بخش ۵-۱

۱. برای تابع  $f(x, y) = xy + 3$  مقادیر زیر را بیابید.

الف)  $f(5, 3)$       ب)  $f(x+y, x-y)$       ج)  $f(xy, x^2y^2)$

۲. اگر  $g(x, y) = ye^{-x}$  و  $x(t) = \ln(t^2 + 1)$  و  $y(t) = t + 1$  آنگاه  $g(x(t), y(t))$  را بیابید.

۳. برای تابع سه متغیره  $f(x, y, z) = zxy + x$  مقادیر زیر را بیابید.

الف)  $f(-1, 0, 2)$       ب)  $f(x+y, x-y, x^2)$       ج)  $f(xy, \frac{y}{x}, xz)$

۴. دامنه‌ی هریک از توابع دو متغیره‌ی داده شده را بیابید و آن را در صفحه‌ی  $xy$  نمایش دهید.

الف)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 9)$       ب)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

ج)  $f(x, y) = \ln x + \ln y$       د)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y}$

### ۵-۲ حد و پیوستگی

در این بخش به بیان مقدمه‌ای از مفهوم حد و پیوستگی توابع دو یا چند متغیره می‌پردازیم. مطالب ذکر شده در این جا تنها برای آشنایی مختصر دانشجویان با این مفهوم و ارتباط آن با موضوع اصلی این فصل یعنی مشتقات جزئی بیان می‌شود، بنابراین از ذکر تمام جزئیات صرف نظر خواهد شد. بدیهی است دانشجویان علاقمند به آشنایی

دقیق بحث حد می‌توانند به کتاب‌های حساب دیفرانسیل پیشرفته مراجعه نمایند.

### ۵-۲-۱ تعریف

حد تابع  $f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  برابر  $L$  است اگر با نزدیک شدن نقطه‌ی متحرک  $(x, y)$  به  $(a, b)$ ، مقدار تابع به عدد  $L$  نزدیک گردد و در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

### تذکره ۵-۲

(الف) حد یک تابع در صورت وجود منحصر بفرد است.  
(ب) حد توابع سه متغیره و به‌طور کلی  $n$  متغیره، به طریق فوق قابل تعریف است. البته در این بخش تنها به بررسی مثال‌هایی از حالت دو متغیره خواهیم پرداخت.

### مثال ۵-۵

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (vx^2 - 5xy + 4) = v(1)^2 - 5(1)(2) + 4 = 1 \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{3x - y}{x + y} = \frac{3(2) - 0}{2 + 0} = \frac{6}{2} = 3 \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} e^{vx-y^2} = e^{v(1)-9} = e^{-v} \quad (\text{ج})$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = \frac{1}{1} \quad (\text{د})$$

دقت کنید که در این مثال تغییر متغیر  $z = x^2 + y^2$  را به‌کاربردیم و از این نکته که هرگاه  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  آنگاه  $z \rightarrow 0$  نیز به خوبی استفاده شده است. ■

### مثال ۵-۶

اگر  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  باشد، آنگاه حد این تابع را در نقطه‌ی  $(0, 0)$  از مسیرهای خواسته

شده محاسبه کنید.

الف) نزدیک شدن  $(x, y)$  به  $(0, 0)$  از مسیر محور  $x$  ها.

ب) نزدیک شدن  $(x, y)$  به  $(0, 0)$  از مسیر محور  $y$  ها.

ج) نزدیک شدن  $(x, y)$  به  $(0, 0)$  از مسیر محور  $y = x$ .

د) نزدیک شدن  $(x, y)$  به  $(0, 0)$  از مسیر خط  $y = -x$ .

ه) نزدیک شدن  $(x, y)$  به  $(0, 0)$  از مسیر سهمی  $y = x^2$ .

حل)

الف) در مسیر محور  $x$  ها داریم  $y = 0$ ، بنابراین تابع دو متغیره  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  به تابع

تک متغیره  $f(x, 0) = \frac{x(0)}{x^2 + 0^2} = 0$  تبدیل می شود، که به وضوح حد این تابع هنگامی که  $x \rightarrow 0$  میل می کند، برابر صفر است.

ب) در مسیر محور  $y$  ها داریم  $x = 0$ ، بنابراین تابع دو متغیره  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  به تابع

تک متغیره  $f(0, y) = \frac{(0)y}{0^2 + y^2} = 0$  تبدیل می شود، که به وضوح حد این تابع نیز هنگامی که  $y \rightarrow 0$  برابر صفر است.

ج) در مسیر خط  $y = x$  تابع دو متغیره  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  به صورت تابع تک متغیره

$$f(x, x) = \frac{x(x)}{x^2 + x^2} = \frac{x^2}{2x^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

د) در مسیر خط  $y = -x$  تابع دو متغیره  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  به صورت تابع

$$f(x, -x) = \frac{x(-x)}{x^2 + (-x)^2} = \frac{-x^2}{2x^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,-x) \rightarrow (0,0)} f(x, -x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

ه) در مسیر  $y = x^2$  تابع دو متغیره مورد نظر به صورت تابع یک متغیره

$$f(x, x^r) = \frac{x(x^r)}{x^r + (x^r)^r} = \frac{x^r}{x^r + x^r}$$

نوشته می شود، بنابراین:

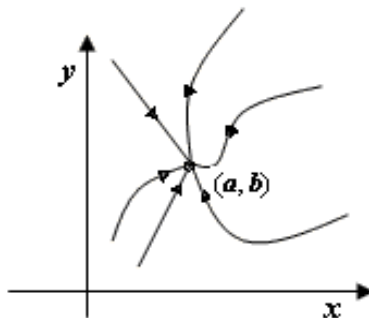
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,-x) \rightarrow (0,0)} f(x,x^r) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r}{x^r + x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+x^r} = 0. \blacksquare$$

### ۵-۲-۲ قضیه

الف) اگر  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ ، آنگاه در هر مسیر که نقطه‌ی  $(x,y)$  را به  $(a,b)$  متصل می کند، حاصل حد مورد نظر برابر  $L$  است.

ب) اگر مسیری از  $(x,y)$  به  $(a,b)$  باشد که تابع  $f(x,y)$  دارای حد نباشد و یا در دو مسیر مختلف جواب‌های متفاوتی برای حد تابع حاصل شود، آنگاه  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$  موجود نیست.

در شکل زیر چند مسیر دلخواه که از نقطه‌ی  $(a,b)$  می گذرند، نمایش داده شده است.



### مثال ۵-۷

نشان دهید که تابع  $f(x,y) = \frac{xy}{x^r + y^r}$  در نقطه‌ی  $(0,0)$  دارای حد نیست.

(حل)

همان طور که در مثال ۵-۶ دیده شد، در مسیر  $y = 0$  داریم  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$  و در

مسیر  $y = x$  داریم  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{1}{2}$  اکنون باتوجه به این که در دو مسیر مجزا

جواب های متفاوتی به دست آمده است، پس حد مورد نظر وجود ندارد. ■

## تذکره ۲-۵

(الف) برای اثبات عدم وجود حد برای تابع  $f(x,y)$  در نقطه دلخواه  $(a,b)$  کافی است که دو مسیر متفاوت  $C_1$  و  $C_2$  در صفحه  $xy$  که از نقطه  $(a,b)$  عبور می کنند، را طوری بیابیم که حد تابع مورد نظر در این مسیرها برابر نشود.

(ب) روش مذکور تنها در مورد اثبات موجود نبودن حد یک تابع در نقطه داده شده است و در مواردی که می خواهیم اثبات کنیم حد تابعی وجود دارد، به کار نمی رود. روش اصلی در اثبات موارد دوم، به کار بردن روش  $\epsilon$  و  $\delta$  است که در این مقال نمی گنجد.

## مثال ۵-۸

نشان دهید که حد تابع  $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$  در نقطه  $(0,0)$  موجود نیست.

(حل)

با انتخاب دو مسیر محور  $x$  ها و محور  $y$  ها که هر دو از نقطه  $(0,0)$  عبور می کنند، این مسأله را پیگیری می کنیم:

در مسیر محور  $x$  ها داریم:  $y = 0$ ، بنابراین تابع دو متغیره  $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$  به تابع

تک متغیره  $f(x,0) = \frac{x-0}{x+0} = \frac{x}{x}$  تبدیل می شود، که به وضوح حد این تابع هنگامی که  $x \rightarrow 0$  میل می کند، برابر عدد یک است.

در مسیر محور  $y$  ها داریم:  $x = 0$ ، بنابراین تابع دو متغیره  $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$  به تابع

تک متغیره  $f(0,y) = \frac{0-y}{0+y} = \frac{-y}{y}$  تبدیل می شود، که به وضوح حد این تابع هنگامی که  $y \rightarrow 0$  میل می کند، برابر عدد منفی یک است. بنابراین در دو مسیر مجزا،

جواب‌های متفاوتی حاصل گردید، یعنی حد تابع مورد نظر موجود نیست. ■

### تذکره ۳-۵

اگر در بررسی حد تابع  $f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(0, 0)$  با انتخاب مسیر  $y = mx$ ، به تابع تک ضابطه‌ای برسیم که حد آن در نقطه‌ی  $(0, 0)$  وابسته به مقدار  $m$  باشد، آنگاه حد تابع مورد نظر در این نقطه وجود ندارد.

### مثال ۹-۵

نشان دهید که حد تابع  $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^3}$  در نقطه‌ی  $(0, 0)$  موجود نیست.

(حل)

با توجه به تذکره بالا از مسیر  $y = mx$  به نقطه‌ی  $(0, 0)$  نزدیک می‌شویم. در این صورت تابع دومتغیره‌ی داده شده به صورت  $f(x, mx) = \frac{2x^2(mx)}{x^4 + (mx)^3} = \frac{2mx^3}{x^4 + m^3x^3}$  تبدیل می‌شود که تنها شامل متغیر  $x$  است. اکنون داریم:

$$\lim_{(x, mx) \rightarrow (0, 0)} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx^3}{x^4 + m^3x^3} = \frac{2m}{m^3} = \frac{2}{m^2}$$

یعنی مقدار حد وابسته به مقدار  $m$  است، پس حد تابع دو متغیره‌ی داده شده در  $(0, 0)$  موجود نیست. ■

### ۳-۲-۵ تعریف

تابع دومتغیره‌ی  $f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  پیوسته است، اگر شرایط زیر برقرار باشد:

الف)  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$  موجود باشد.

ب) تابع  $f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  تعریف شده باشد، یعنی  $f(a, b)$  موجود باشد.

ج)  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$  برابر با  $f(a, b)$  باشد.

مثال ۵-۱۰

نشان دهید تابع  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  در نقطه‌ی  $(0, 0)$  پیوسته است.

(حل)

ابتدا  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

دقت کنیم که در محاسبه‌ی حد فوق از تغییر متغیر  $z = x + y$  استفاده شده است. اما با توجه به تعریف تابع داریم  $f(0, 0) = 1$ ، بنابراین با توجه به برابری حد تابع با مقدار تابع در نقطه‌ی  $(0, 0)$ ، پیوستگی در این نقطه به اثبات می‌رسد. ■

مثال ۵-۱۱

نشان دهید تابع  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  در نقطه‌ی  $(0, 0)$  ناپیوسته است.

(حل)

ابتدا با در نظر گرفتن مسیر  $y = mx$  به بررسی  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  می‌پردازیم. با قراردادن

$y = mx$  ضابطه‌ی تابع دومتغیره‌ی داده شده، به صورت تابع تک‌متغیره‌ی

$$f(x, mx) = \frac{x^2}{x^2 + (mx)^2}$$

تبدیل می‌شود. بنابراین:

$$\lim_{(x, mx) \rightarrow (0, 0)} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{1}{1 + m^2}$$

اکنون با توجه به وابستگی این حد به مقدار  $m$ ،  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  موجود نیست و این بدان

معنی است که شرط اول پیوستگی تابع  $f(x, y)$  برقرار نیست. ■



### تمرین‌های بخش ۵-۲

۱. حدود داده شده را محاسبه کنید:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} x^2 \sqrt{y^2 + 2x} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{\pi}, \pi)} (xy \sin xy) \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{x+y}{x^2+y} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\tan(x+y)}{x+y} \quad (\text{ج})$$

۲. در هر قسمت نشان دهید که حد تابع داده شده در نقطه‌ی  $(0,0)$  موجود نیست.

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \quad (\text{ب})$$

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad (\text{الف})$$

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 \quad (\text{د})$$

$$f(x,y) = \frac{\cos(xy)}{x^2+y^2} \quad (\text{ج})$$

$$۳. \text{ نشان دهید تابع } f(x,y) = \begin{cases} \frac{\tan(x-y)}{x-y} & (x,y) \neq (0,0) \\ ۱ & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ در نقطه‌ی } (0,0) \text{ پیوسته است.}$$

$$۴. \text{ نشان دهید تابع } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ ۲ & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ در نقطه‌ی } (0,0) \text{ ناپیوسته است.}$$

### ۵-۳ مشتقات جزئی

در این بخش به توسعه یکی از کاربردی‌ترین مباحث حساب دیفرانسیل و انتگرال، یعنی مفهوم مشتق یک تابع، برای توابع چند متغیره خواهیم پرداخت. مشتق توابع چند متغیره شباهت زیادی با مشتق توابع یک متغیره دارد. اگر برای یک تابع چند متغیره  $f$  تمام متغیرها به جز یکی از آن‌ها را ثابت فرض کنیم، آنگاه با تابعی تک متغیره مواجه خواهیم شد. مشتق این تابع را یک مشتق جزئی تابع  $f$  نامیم.

### ۵-۳-۱ تعریف

فرض کنیم  $z = f(x, y)$  تابعی بر حسب دو متغیر  $x$  و  $y$  باشد. اگر

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

موجود باشد، آن را مشتق جزئی  $f$  نسبت به متغیر  $x$  نامیده و با نماد  $f_x(x, y)$  یا  $z_x$

نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب در صورت وجود حد

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

آن را مشتق جزئی  $f$  نسبت به متغیر  $y$  نامیده و با نماد  $f_y(x, y)$  یا  $z_y$  نمایش

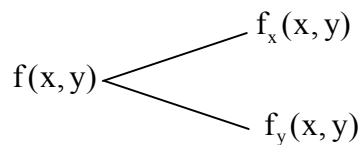
می‌دهیم.

### تذکره ۵-۴

برای یک تابع دو متغیره  $f(x, y)$  دو نوع مشتق جزئی وجود دارد:

الف) مشتق جزئی نسبت به  $x$  که آن را با  $f_x(x, y)$  نمایش می‌دهیم. در هنگام محاسبه‌ی این مشتق، متغیر  $y$  ثابت در نظر گرفته می‌شود و از تابع  $f(x, y)$  نسبت به  $x$  مشتق می‌گیریم.

ب) مشتق جزئی نسبت به  $y$  که آن را با  $f_y(x, y)$  نمایش می‌دهیم. در هنگام محاسبه این مشتق، متغیر  $x$  ثابت در نظر گرفته می‌شود و از تابع  $f(x, y)$  نسبت به  $y$  مشتق می‌گیریم.



### مثال ۵-۱۲

اگر  $f(x, y) = 3x^2y^2 + 4x + 7y$  باشد، آنگاه مشتقات جزئی  $f_x(x, y)$  و  $f_y(x, y)$  را بیابید و سپس مقدار  $f_x(1, 2)$  و  $f_y(1, 2)$  را محاسبه کنید.

(حل)

ابتدا متغیر  $y$  را ثابت در نظر می‌گیریم و از عبارت مورد نظر نسبت به  $x$  مشتق‌گیری

می‌کنیم:

$$f_x(x, y) = \frac{d}{dx}(3x^2y^2 + 4x + 7y) = 6xy^2 + 4$$

اکنون با ثابت نگه داشتن متغیر  $x$ ، از عبارت مورد نظر نسبت به متغیر  $y$  مشتق می‌گیریم تا مشتق جزئی نسبت به  $y$  نیز به دست آید:

$$f_y(x, y) = \frac{d}{dy}(3x^2y^2 + 4x + 7y) = 6x^2y + 7$$

بنابراین داریم:

$$\blacksquare \cdot f_x(1, 2) = 6(1)(2)^2 + 4 = 28 \text{ و } f_y(1, 2) = 6(1)^2(2) + 7 = 19$$

### ۵-۳-۲ نمادهای مشتق جزئی

اگر  $z = f(x, y)$  آنگاه مشتقات جزئی  $f_x$  و  $f_y$  (که به آن‌ها مشتقات جزئی مرتبه اول تابع دو متغیره  $f$  نیز گفته می‌شود) را با نمادهای

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}$$

نیز نمایش می‌دهیم.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، برای نمایش مشتقات جزئی بجای  $d$  از نماد  $\partial$  (روند) استفاده می‌شود. همچنین برای نمایش مشتقات جزئی مرتبه اول تابع  $z = f(x, y)$  در نقطه  $(a, b)$  می‌توان نمادهای زیر را به کار برد:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a, b), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(a, b)}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a, b)}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=a, y=b}$$

### مثال ۵-۱۳

اگر  $f(x, y) = x^2y + 5y^2$  آنگاه مطلوبست  $\frac{\partial f}{\partial x}$  و  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

(حل)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + 5y^2) = y \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + 5 \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = y(2x) + 5(0) = 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + 5y^2) = x^2 \frac{\partial}{\partial y}(y) + 5 \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = x^2(1) + 5(2y) = x^2 + 10y. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

مثال ۵-۱۴

اگر  $f(x, y) = x \ln y - y \ln x$  آنگاه مقادیر زیر را بیابید:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(e, e) \quad \text{الف)} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(e, e) \quad \text{ب)}$$

(حل)

الف) ابتدا به محاسبه  $\frac{\partial f}{\partial x}$  می پردازیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x \ln y - y \ln x) = \ln y \frac{\partial}{\partial x}(x) - y \frac{\partial}{\partial x}(\ln x) = \ln y - \frac{y}{x}$$

بنابراین :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(e, e) = \ln e - \frac{e}{e} = 1 - 1 = 0$$

ب) با محاسبه  $\frac{\partial f}{\partial y}$  داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x \ln y - y \ln x) = x \frac{\partial}{\partial y}(\ln y) - \ln x \frac{\partial}{\partial y}(y) = \frac{x}{y} - \ln x$$

بنابراین  $\frac{\partial f}{\partial y}(e, e) = \frac{e}{e} - \ln e = 1 - 1 = 0$  ■

مثال ۵-۱۵

مشتقات جزئی مرتبه اول تابع  $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$  را بیابید.

(حل)

با توجه به این که تابع موردنظر در این مثال، سه متغیره است، باید سه مشتق جزئی مرتبه اول  $f_x$ ،  $f_y$  و  $f_z$  را محاسبه کنیم:

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y + ye^z + ze^x) = e^y + ze^x$$

$$f_y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}(xe^y + ye^z + ze^x) = xe^y + e^z$$

$$f_z(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}(xe^y + ye^z + ze^x) = ye^z + e^x \quad \blacksquare$$

### ۳-۳-۵ مشتقات جزئی مرتبه دوم

فرض کنیم  $f$  تابعی دو متغیره بر حسب  $x$  و  $y$  باشد. با توجه به این که  $\frac{\partial f}{\partial x}$  و  $\frac{\partial f}{\partial y}$  توابعی دو متغیره بر حسب  $x$  و  $y$  می باشند، پس خود آنها نیز دارای مشتقات جزئی هستند. بنابراین چهار مشتق جزئی مرتبه دوم برای  $f$  قابل تعریفاند:

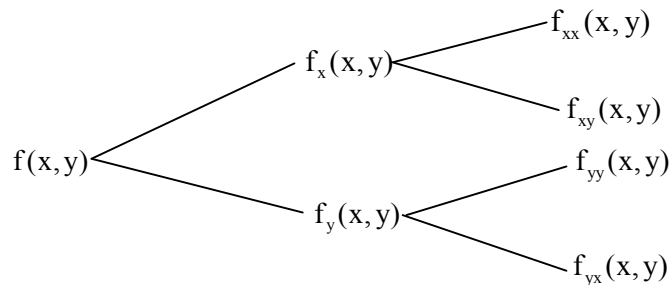
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xx} \quad \text{دومرتبه مشتق گیری نسبت به } x :$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yy} \quad \text{دومرتبه مشتق گیری نسبت به } y :$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xy} \quad \text{مشتق گیری نسبت به } x \text{ و سپس } y :$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yx} \quad \text{مشتق گیری نسبت به } y \text{ و سپس } x :$$

در نمودار درختی زیر مشتقات تابع دو متغیره  $f(x, y)$  دیده می شوند:



### مثال ۵-۱۶

مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع  $f(x, y) = x^2 y^3 + xy^4$  را بیابید.

(حل)

داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2 + 4xy^3 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x y^3 + y^4$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2xy^2 + y^3) = 2xy^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2x^2y + 2xy^2) = 2x^2 + 2xy^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x^2y + 2xy^2) = 2x^2y + 2xy^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy^2 + y^3) = 2xy^2 + 2y^3 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

مثال ۵-۱۷

اگر  $f(x, y) = y^2 \sin x + \cos y$  آنگاه  $f_{yxy}$  را بیابید.

(حل)

$$\begin{aligned}f_{yxy} &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} (2y \sin x - \sin y) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (2y \sin x - \sin y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2y \cos x) = 2 \sin x \quad \blacksquare\end{aligned}$$

مثال ۵-۱۸

اگر  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy - 11y$  آنگاه مقدار عبارت  $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$  را در نقطه‌ی  $(-2, -1)$  محاسبه کنید.

(حل)

$f_x = 2x - 4y$  و  $f_y = 2y - 4x - 11$  بنابراین:

$$f_{yy} = 2y \text{ و } f_{xy} = -4, f_{xx} = 2$$

یعنی:

$$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 2(2y) - (-4)^2 = 4y - 16$$

اکنون مقدار عبارت فوق در نقطه‌ی  $(-2, -1)$  را می‌یابیم:

$$(f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2)(-2, -1) = 4(-1) - 16 = -20 \quad \blacksquare$$

۴-۳-۵ قضیه

اگر  $f$  تابعی دو متغیره باشد و توابع  $f_{xy}$  و  $f_{yx}$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  پیوسته باشند، آنگاه  

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

مثال ۵-۱۹

درستی قضیه‌ی فوق را در تابع  $f(x, y) = xe^y + \sin(xy)$  بررسی کنید.  
 (حل)

$$f_y(x, y) = xe^y + x \cos(xy) \quad \text{و} \quad f_x(x, y) = e^y + y \cos(xy)$$

بنابراین:

$$f_{xy}(x, y) = e^y + \cos(xy) - xy \sin xy$$

و

$$f_{yx}(x, y) = e^y + \cos(xy) - xy \sin xy$$

حال با توجه به پیوسته بودن تابع مورد نظر در هر نقطه از دامنه‌اش، صحت قضیه‌ی ۴-۳-۵ بدیهی است. ■

تمرین‌های بخش ۳-۵



۱. اگر  $f(x, y) = 5x^2y^2$  آنگاه مطلوب است:

- الف)  $f_x(x, y)$     ب)  $f_y(x, y)$     ج)  $f_x(2, y)$     د)  $f_x(x, 1)$   
 ه)  $f_y(x, 1)$     و)  $f_y(2, y)$     ز)  $f_x(2, 1)$     ح)  $f_y(2, 1)$

۲. اگر  $z = e^{xy} \cos y$  آنگاه مطلوب است:

- الف)  $\frac{\partial z}{\partial x}$     ب)  $\frac{\partial z}{\partial y}$     ج)  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0, y)}$     د)  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x, \frac{\pi}{4})}$   
 ه)  $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0, y)}$     و)  $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(x, \frac{\pi}{4})}$     ز)  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(\ln 2, \frac{\pi}{4})}$     ح)  $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(\ln 2, \frac{\pi}{4})}$

۳. مشتقات جزئی مرتبه اول توابع دومتغیره ی زیر را بیابید.

$$\text{الف) } f(x, y) = \sin(xy) \quad \text{ب) } f(x, y) = \frac{1}{x+y}$$

$$\text{ج) } f(x, y) = e^{x^2+y^2} \quad \text{د) } f(x, y) = \sqrt{3x^2y - 4x^2y^2}$$

۴. مشتقات جزئی مرتبه اول توابع سه متغیره ی زیر را بیابید.

$$\text{الف) } f(x, y, z) = (x + 2y - z)^2 \quad \text{ب) } f(x, y, z) = xyz + \frac{1}{xyz}$$

$$\text{ج) } f(x, y, z) = \cos(xy^2z) \quad \text{د) } f(x, y, z) = \ln x + \ln y + \ln z$$

۵. مشتقات جزئی مرتبه دوم توابع زیر را بیابید.

$$\text{الف) } f(x, y) = x^5 + 4x^2y + 3x^2y^2 - xy^4 - 2y^5$$

$$\text{ب) } f(x, y) = xy \ln x + 3$$

$$\text{ج) } f(x, y, z) = e^x + e^y + e^z$$

$$\text{د) } f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

۶. عبارات زیر را بر حسب نماد  $\partial$  نمایش دهید.

$$\text{الف) } f_{xxx} \quad \text{ب) } f_{xyy} \quad \text{ج) } f_{xyx} \quad \text{د) } f_{yyx}$$

۷. اگر  $f(x, y) = x^2y^2 - 4xy^2 + x + y$  آنگاه مطلوبست:

$$\text{الف) } f_{xyy} \quad \text{ب) } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{ج) } f_{xyx} \quad \text{د) } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}$$

۸. اگر  $f(x, y) = e^x \sin y + e^y \cos x$  آنگاه نشان دهید که  $f_{xx} + f_{yy} = 0$ .

۹. اگر  $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$  آنگاه نشان دهید که:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = (x + y + z)^2$$

۱۰. با فرض  $f(x, y) = \sqrt{x - y^2}$  نشان دهید که:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

## ۵-۴ دیفرانسیل کل، قاعده‌ی زنجیره‌ای و مشتق‌های

### ۵-۴-۱ تعریف

فرض کنیم  $z = f(x, y)$  یک تابع دو متغیره باشد. اگر مشتقات جزئی مرتبه اول این تابع موجود باشد، آنگاه دیفرانسیل کل این تابع را با نماد  $df$  یا  $dz$  نمایش می‌دهیم که عبارتست از:

$$df = dz = f_x dx + f_y dy$$

### مثال ۵-۲۰

دیفرانسیل کل تابع  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$  را بیابید.

(حل)

$$df = f_x dx + f_y dy = (2x - y)dx + (2y - x)dy. \blacksquare$$

### مثال ۵-۲۱

اگر  $z = xy^3 - 2xy + x - 2$  آنگاه دیفرانسیل کل آن را در حالتی که  $x = 1$ ،  $y = 2$ ،  $dx = -1$  و  $dy = 3$  بیابید.

(حل)

$$dz = z_x dx + z_y dy = (y^3 - 2y + 1)dx + (3xy^2 - 2x)dy$$

بنابراین با فرض  $dx = -1$  و  $dy = 3$  داریم:

$$dz(1, 2) = (2^3 - 2(2) + 1)(-1) + (3(1)(2)^2 - 2(1))(3) = 25. \blacksquare$$

### تذکره ۵-۵

دیفرانسیل کل تابع سه متغیره  $f(x, y, z)$  نیز به صورت مشابه قابل تعریف است و عبارتست از:

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

### مثال ۵-۲۲

دیفرانسیل کل تابع  $f(x, y, z) = xyz + ۲$  را بیابید.

(حل)

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = yz dx + xz dy + xy dz . \blacksquare$$

### مثال ۵-۲۳

فرض کنیم  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  و متغیرهای  $x, y, z$  توابعی بر حسب  $t$  باشند که به صورت :

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = t + ۳$$

تعریف می شوند، مطلوبست محاسبه  $df|_{t=۲}$ .

(حل)

داریم:

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = ۲x dx + ۲y dy + ۲z dz$$

اما:

$$dz = (t + ۳)dt = dt \quad \text{و} \quad dy = d(\cos t) = -\sin t dt, \quad dx = d(\sin t) = \cos t dt$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} df &= ۲x dx + ۲y dy + ۲z dz = ۲ \sin t (\cos t dt) + ۲ \cos t (-\sin t dt) + ۲(t + ۳)dt \\ &= ۲(t + ۳)dt \end{aligned}$$

پس در  $t = ۲$  داریم:

$$df|_{t=\frac{\pi}{4}} = ۲(۲ + ۳)dt = ۱۰dt . \blacksquare$$

در ادامه بحث به بیان قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق‌گیری برای توابع چندمتغیره می‌پردازیم. در حالت تک متغیره اگر  $y$  تابع مشتق‌پذیری بر حسب  $x$  باشد و  $X$  نیز تابعی بر حسب متغیر  $t$  باشد آنگاه این قاعده بیان می‌کند که مشتق تابع  $y$  بر حسب  $t$  عبارتست از:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

قضیه‌ی بعد این قاعده را برای توابع دو متغیره و سه متغیره بیان می‌کند:

## ۵-۲-۴ قضیه (قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق)

الف) اگر  $x = x(t)$  و  $y = y(t)$  متغیرهای تابعی مشتق‌پذیر بر حسب  $t$  باشند و مشتقات جزئی مرتبه اول تابع  $z = f(x, y)$  بر حسب  $x$  و  $y$  موجود باشد، آنگاه تابع  $z = f(x(t), y(t))$  نیز بر حسب  $t$  مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

ب) اگر هریک از توابع  $x = x(t)$ ،  $y = y(t)$  و  $z = z(t)$  بر حسب  $t$  مشتق‌پذیر باشند و مشتقات جزئی مرتبه اول تابع  $w = f(x, y, z)$  موجود باشد، آنگاه تابع  $w = f(x(t), y(t), z(t))$  بر حسب  $t$  مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

## مثال ۵-۲

اگر داشته باشیم:

$$z = x^2 y, \quad x = t^2, \quad y = t^3$$

آنگاه با بکاربردن قاعده‌ی زنجیره‌ای  $\frac{dz}{dt}$  را بیابید و سپس با نوشتن تابع  $z$  بر حسب  $t$  به‌طور مستقیم این نتیجه را بررسی کنید.

(حل)

ابتدا به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای  $\frac{dz}{dt}$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2xy)(2t) + (x^2)(3t^2) \\ &= (2t^4)(2t) + (t^4)(3t^2) = 7t^5 \end{aligned}$$

اکنون به‌طور مستقیم به محاسبه‌ی  $\frac{dz}{dt}$  می‌پردازیم. برای انجام این کار ابتدا  $z$  را بر حسب  $t$  می‌نویسیم:

$$z = x^2 y = (t^2)^2 (t^3) = t^7$$

بنابراین  $\frac{dz}{dt} = 7t^6$ . یعنی همان نتیجه‌ای که از طریق مشتق زنجیره‌ای حاصل گردید. ■

مثال ۵-۲۵

فرض کنیم که :

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad z = \tan \theta$$

با بکارگیری مشتق زنجیره‌ای مقدار  $\frac{dw}{d\theta}$  را در  $\theta = \frac{\pi}{4}$  بیابید.

(حل)

با توجه به قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق برای توابع سه متغیره داریم:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{d\theta} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)(-\sin \theta) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}(2y)(\cos \theta) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}(2z)(\sec^2 \theta) \end{aligned}$$

اما در نقطه‌ی  $\theta = \frac{\pi}{4}$  داریم:

$$x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

با قرار دادن مقادیر فوق و همچنین  $\theta = \frac{\pi}{4}$  در فرمول داریم:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dw}{d\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (\sqrt{2}) \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (\sqrt{2}) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (2) (2) \\ &= \sqrt{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

۵-۴-۳ قضیه (قاعده‌ی زنجیره‌ای برای مشتقات جزئی)

الف) اگر توابع  $x = x(u, v)$  و  $y = y(u, v)$  دارای مشتقات جزئی مرتبه اول نسبت به  $u$  و  $v$  باشند و  $z = f(x, y)$  نیز دارای مشتقات جزئی مرتبه اول نسبت به  $x$  و  $y$  باشد، آنگاه تابع  $z = f(x(u, v), y(u, v))$  دارای مشتقات جزئی مرتبه اول نسبت به  $u$  و  $v$  است و داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

ب) اگر توابع  $x = x(u, v)$ ،  $y = y(u, v)$  و  $z = z(u, v)$  دارای مشتقات جزئی مرتبه

اول نسبت به  $u$  و  $v$  باشند و  $w = f(x, y, z)$  نیز دارای مشتقات جزئی مرتبه اول نسبت به  $x, y$  و  $z$  باشد، آنگاه تابع

$$w = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

دارای مشتقات جزئی مرتبه اول نسبت به  $u$  و  $v$  است و داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}\end{aligned}$$

#### مثال ۵-۲۶

اگر  $z = \sin(xy)$ ،  $x = \sqrt{u} + v$ ،  $y = \frac{u}{v}$  آنگاه مطلوبست  $\frac{\partial z}{\partial u}$  و  $\frac{\partial z}{\partial v}$ .  
(حل)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = (y \cos(xy))(\frac{1}{2\sqrt{u}}) + (x \cos(xy))(\frac{1}{v}) \\ &= \frac{\sqrt{u}}{v} \cos(\frac{\sqrt{u}}{v} + u) + (\frac{\sqrt{u}}{v} + 1) \cos(\frac{\sqrt{u}}{v} + u) = (\frac{\sqrt{u}}{v} + 1) \cos(\frac{\sqrt{u}}{v} + u)\end{aligned}$$

و همچنین

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = (y \cos(xy))(1) + (x \cos(xy))(-\frac{u}{v^2}) \\ &= \frac{u}{v} \cos(\frac{\sqrt{u}}{v} + u) - (\frac{\sqrt{u}}{v} + \frac{u}{v}) \cos(\frac{\sqrt{u}}{v} + u) = (-\frac{\sqrt{u}}{v}) \cos(\frac{\sqrt{u}}{v} + u). \blacksquare\end{aligned}$$

#### مثال ۵-۲۷

اگر داشته باشیم:

$$w = e^{xyz}, \quad x = \sqrt{u} + v, \quad y = \sqrt{u} - v, \quad z = u^2 v$$

آنگاه با بکاربردن قاعده‌ی زنجیره‌ای  $\frac{\partial w}{\partial u}$  و  $\frac{\partial w}{\partial v}$  را بیابید.

(حل)

توابع چند متغیره و مشتقات جزئی ۱۸۷

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} = yze^{xyz}(r) + xze^{xyz}(r) + xye^{xyz}(r_{uv}) \\ &= e^{xyz}(ryz + rxz + r_{xy}uv)\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} = yze^{xyz}(1) + xze^{xyz}(-1) + xye^{xyz}(u^r) \\ &= e^{xyz}(yz - xz + xyu^r)\end{aligned}$$

که البته می‌توان با جایگزین کردن مقادیر  $x, y$  و  $z$  برحسب  $u$  و  $v$  مقادیر  $\frac{\partial w}{\partial v}$  و  $\frac{\partial w}{\partial u}$  را برحسب  $u$  و  $v$  به دست آورد. ■

#### مثال ۵-۲۸

$$\text{با فرض } z = f(u - v, v - u) \text{ نشان دهید که } \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

(حل)

قرار می‌دهیم  $x = u - v$  و  $y = v - u$ . دراین تابع  $z = f(x, y)$  را داریم و با بکارگیری قاعده‌ی زنجیره‌ای بر آن داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = z_x(1) + z_y(-1) = z_x - z_y$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = z_x(-1) + z_y(1) = -z_x + z_y$$

بنابراین :

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = z_x - z_y - z_x + z_y = 0. \quad \blacksquare$$

در ادامه بحث به بررسی عمل مشتق‌گیری از توابع ضمنی خواهیم پرداخت. برای شروع تابع دو متغیره‌ی  $z = f(x, y)$  را که در آن  $y$  تابعی مشتق‌پذیر برحسب  $x$  است، در نظر گیریم. بنابه قسمت الف) از قضیه‌ی ۵-۴-۲ تابع  $z = f(x, y(x))$  تابعی مشتق‌پذیر برحسب  $x$  است. بنابراین:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (*)$$

اکنون این نتیجه را برای یافتن مشتق توابعی که به صورت ضمنی تعریف شده اند، به کار خواهیم برد. به طور مثال فرض کنیم معادله  $f(x, y) = c$  نشان دهنده ی یک فرمول ضمنی باشد. در این صورت با در نظر گرفتن  $z = c$  در رابطه ی (\*) داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

حال اگر  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$  باشد آنگاه داریم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

مطالب گفته شده در قسمت بالا را در قالب قضیه ی صفحه بعد بیان می کنیم:

#### ۵-۴-قضیه

فرض کنیم معادله ی  $f(x, y) = c$  متغیر  $y$  را به عنوان یک تابع ضمنی مشتق پذیر

بر حسب متغیر  $x$  وابسته نماید و  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$  در این صورت داریم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

#### مثال ۵-۲۹

با فرض  $xy + y^2 - 2x^2 + 4 = 0$  مطلوبست محاسبه ی  $\frac{dy}{dx}$ .

(حل)

با توجه به فرمول ارائه شده در قضیه ی قبل داریم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{y - 4x}{x + 2y^2} \quad \blacksquare$$

قضیه ی بعد مشتق ضمنی را برای معادله ی  $f(x, y, z) = c$  بیان می کند:

۵-۴-۵ قضیه

اگر  $f(x, y, z) = c$  متغیر  $z$  را بعنوان یک تابع ضمنی بر حسب متغیرهای  $x$  و  $y$  تعریف نماید و  $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$  آنگاه داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z}$$

مثال ۵-۳۰

در معادله  $1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2$  مقادیر  $\frac{\partial z}{\partial x}$  و  $\frac{\partial z}{\partial y}$  را در نقطه‌ی  $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  بیابید.  
(حل)

با توجه به قضیه‌ی ۵-۴-۵ و با در نظر گرفتن  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2$  داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{\frac{2x}{4}}{2z} = -\frac{x}{4z} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{\frac{2y}{9}}{2z} = -\frac{y}{9z}$$

پس:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})} = -\frac{-1}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{9(\frac{\sqrt{3}}{2})} = 0. \quad \blacksquare$$

تمرین‌های بخش ۵-۴



۱. دیفرانسیل کل توابع داده شده را بیابید.

الف)  $f(x, y) = xy - 3x^2 + 5y^2 + 2$       ب)  $f(x, y) = \frac{x+y}{xy}$

ج)  $w = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$       د)  $w = \frac{xyz}{x+y+z}$

۲. دیفرانسیل کل تابع  $f(x, y) = x^2 + xy - 5y^2$  را در نقطه‌ی  $(1, 2)$  و به ازای  $dx = 0.001$  و  $dy = -0.01$  بیابید.

۳. با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای برای مشتق در هر قسمت  $\frac{dz}{dt}$  را بیابید.

$$z = \frac{x + 2y^3}{3} \quad \text{الف) } x = t^2 + 1, y = 2t^3$$

$$z = \ln(x^2 + 2y) \quad \text{ب) } x = \sqrt[3]{t}, y = \sqrt{t}$$

$$z = 2 \tan x - \cot y \quad \text{ج) } x = \frac{1}{t}, y = 3t - 1$$

$$z = e^{x+y-1} \quad \text{د) } x = 1 - 2t, y = 2t + t^2$$

۴. به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای برای مشتق در هر قسمت  $\frac{dw}{dt}$  را بیابید.

$$w = 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}z \quad \text{الف) } x = t^3, y = t^2, z = t$$

$$w = 2 \sin xy + \cos x - 2z \quad \text{ب) } x = 1 - t, y = t - 1, z = t^2$$

$$w = \sqrt{1 + x - 2yz^2x} \quad \text{ج) } x = \ln t, y = t, z = 3t$$

$$w = \ln(x + 2y - 3z) \quad \text{د) } x = 2t - 3, y = \cos t, z = \sin t$$

۵. با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای برای مشتق جزئی در هر قسمت  $\frac{dz}{dv}$  و  $\frac{dz}{du}$  را بیابید.

$$z = 2x^2y + y^2 \quad \text{الف) } x = \sqrt{u+v}, y = 2u - 3v^2$$

$$z = \sqrt{x-y} \quad \text{ب) } x = \frac{u}{v}, y = uv$$

$$z = \sin x \cos y \quad \text{ج) } x = (u-v)^2, y = e^{u+v}$$

$$z = \frac{1}{x} + y \quad \text{د) } x = \frac{3}{u+v}, y = \frac{u+v}{3}$$

۶. اگر  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  و  $P = x^2y - xy^2 + 5x$ ،  $\frac{\partial P}{\partial \theta}$  و  $\frac{\partial P}{\partial r}$  مطلوبست.

۷. اگر  $Q = \sin(t^2 - 2s)$ ،  $t = 3\alpha$  و  $s = \sqrt{2\alpha}$ ،  $\frac{dQ}{d\alpha}$  مطلوبست.

۸. اگر  $w = r^2 - r \cos \theta$ ،  $r = 2t + 2$  و  $\theta = \pi t$ ،  $\left. \frac{dw}{dt} \right|_{t=\frac{1}{3}}$  مطلوبست.

۹. فرض کنیم  $f$  یک تابع مشتق‌پذیر یک متغیره باشد و  $z = f(x^2 + y^2)$  نشان دهید:

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

۱۰. فرض کنیم  $f$  یک تابع مشتق‌پذیر یک متغیره باشد و  $z = f(x + 2y)$  نشان دهید:

توابع چند متغیره و مشتقات جزئی ۱۹۱

$$2 \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

۱۱. اگر  $f$  یک تابع سه متغیره و مشتقپذیر باشد و  $w = f(x - y, y - z, z - x)$  باشد و  $w$  آنگاه نشان دهید:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

۱۲. در توابع ضمنی زیر  $\frac{dy}{dx}$  را بیابید:

$$xy - \cos y + 2x^2 = 0 \quad \text{(الف)}$$

$$x^4 - 5xy^2 + y^3 = 7 \quad \text{(ب)}$$

$$e^{xy} + ye^y = 1 \quad \text{(ج)}$$

$$x - \sqrt{xy} + 2y = 4 \quad \text{(د)}$$

۱۳. در توابع ضمنی زیر  $\frac{\partial z}{\partial x}$  و  $\frac{\partial z}{\partial y}$  را بیابید.

$$xz^2 - y + 2xy + 5x^2\sqrt{y} - 7z = 0 \quad \text{(الف)}$$

$$\ln(1+z) + xy^2 + 5z = 1 \quad \text{(ب)}$$

$$ye^x + 5\cos 4z = 2z^2 + y \quad \text{(ج)}$$

$$e^{xy} \cos xz - e^{xz} \sin yz + 9 = 0 \quad \text{(د)}$$

## ۵-۵ کاربردهایی از مشتق جزئی

در این قسمت به بیان چند مثال از کاربردهای مشتق جزئی در علم بازرگانی و اقتصاد می پردازیم.

### ۵-۵-۱ تولید نهایی

تابع تولید یک بنگاه نشان دهنده تولیداتش یعنی  $q$  به صورت تابعی از نهاده هایش است، و معمولاً این نهاده ها سرمایه  $k$  و نیروی کار  $l$  هستند. بنابراین:

$$q = q(k, l)$$

مشتقات جزئی تابع تولید دارای مفاهیم اقتصادی خاصی هستند، به این صورت که  $\frac{\partial q}{\partial k}$

نمایش دهنده تولید نهایی سرمایه  $(MP_k)$  و  $\frac{\partial q}{\partial l}$  نمایش دهنده تولید نهایی نیروی کار  $(MP_l)$  است.

مثال ۵-۳۱

اگر تابع تولید یک بنگاه اقتصادی به صورت  $q(k, l) = 22000k^2l^2 - 5k^2l^4$  باشد، آنگاه تولید نهایی نیروی کار و تولید نهایی سرمایه را بیابید.

(حل)

$$MP_k = \frac{\partial q}{\partial k} = 44000kl^2 - 10k^2l^4 \quad \text{تولید نهایی سرمایه}$$

$$\blacksquare \cdot MP_l = \frac{\partial q}{\partial l} = 44000k^2l - 20k^2l^3 \quad \text{تولید نهایی نیروی کار}$$

در بحث تابع تولید می توان به معرفی تولیدات متوسط نیروی کار و سرمایه نیز پرداخت. به این صورت که تولید متوسط نیروی کار برابر با تولید کل به ازای یک واحد نیروی کار است. برای نمایش تولید متوسط نیروی کار از نماد  $AP_l$  استفاده می کنیم. بنابراین داریم:

$$AP_l = \frac{q(k, l)}{l}$$

همچنین تولید متوسط سرمایه ( $AP_k$ ) برابر با تولید کل به ازای یک واحد نهادهی سرمایه تعریف می شود. یعنی:

$$AP_k = \frac{q(k, l)}{k}$$

مثال ۵-۳۲

در مثال قبل تولید متوسط سرمایه و نیروی کار را بیابید.

(حل)

با توجه به این که تابع تولید مورد نظر به صورت  $q(k, l) = 22000k^2l^2 - 5k^2l^4$  است، داریم:

$$AP_k = \frac{q(k, l)}{k} = 22000kl^2 - 5k^2l^4$$

$$AP_l = \frac{q(k, l)}{l} = 22000k^2l - 5k^2l^3 \quad \blacksquare$$

### ۵-۵-۲ هزینه نهایی

اگر  $C = C(x, y)$  هزینه توأم برای تولید دو کالای A و B با مقادیر به ترتیب x و y باشد، آنگاه  $\frac{\partial C}{\partial x}$  نشان دهنده هزینه نهایی تولید کالای A و  $\frac{\partial C}{\partial y}$  نیز هزینه نهایی تولید کالای B است.

### مثال ۵-۳۳

اگر تابع  $C = 5xy + 7x^2 + y$  نمایش هزینه توأم تولید دو کالای A و B باشد، آنگاه هزینه نهایی تولید آن‌ها را بیابید.

(حل)

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x} &= 5y + 14x && \text{هزینه نهایی تولید کالای A:} \\ \frac{\partial C}{\partial y} &= 5x + 1 && \text{هزینه نهایی تولید کالای B:} \end{aligned}$$

### ۵-۵-۳ تقاضای نهایی

فرض کنیم تقاضای دو کالای A و B به یکدیگر وابسته باشد و p قیمت متناظر با کالای A و q قیمت متناظر با کالای B باشد. بنابراین تقاضای این دو کالا به صورت توابعی دو متغیره بر حسب p و q خواهد بود. اگر  $x = f(p, q)$  و  $y = g(p, q)$  به ترتیب توابع تقاضای دو کالای A و B باشند، آنگاه:

- الف)  $\frac{\partial x}{\partial p}$  برابر است با تابع تقاضای نهایی کالای A وابسته به قیمت خودش.
- ب)  $\frac{\partial x}{\partial q}$  برابر است با تابع تقاضای نهایی کالای A وابسته به قیمت کالای B.
- ج)  $\frac{\partial y}{\partial q}$  برابر است با تابع تقاضای نهایی کالای B وابسته به قیمت خودش.
- د)  $\frac{\partial y}{\partial p}$  برابر است با تابع تقاضای نهایی کالای B وابسته به قیمت کالای A.

مثال ۳۴-۵

اگر توابع تقاضای ۲ کالای A و B با قیمت‌های p و q به ترتیب برابر  $x = ۲pq + q^۲$  و  $y = ۵q - qp^۲ + ۱۰$  باشند، آنگاه توابع تقاضای نهایی این دو کالا را بیابید.  
(حل)

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial p} &= ۲q && \text{تابع تقاضای نهایی کالای A وابسته به قیمت خودش:} \\ \frac{\partial x}{\partial q} &= ۲p + ۲q && \text{تابع تقاضای نهایی کالای A وابسته به قیمت کالای B:} \\ \frac{\partial y}{\partial q} &= ۵ - p^۲ && \text{تابع تقاضای نهایی کالای B وابسته به قیمت خودش:} \\ \frac{\partial y}{\partial p} &= -۲pq && \text{تابع تقاضای نهایی کالای B وابسته به قیمت کالای A:} \end{aligned}$$

۵-۵-۴ توابع مطلوبیت

تابع مطلوبیت مصرف کننده، مطلوبیت یا رضایت خاطر حاصل شده توسط مصرف کننده را به صورت تابعی از مقادیر کالاهای مصرف شده را بیان می‌کند. اگر مصرف کننده‌ای n کالای  $A_۱, A_۲, \dots, A_n$  را با مقادیر  $q_۱, q_۲, \dots, q_n$  مصرف نماید آنگاه می‌توان تابع مطلوبیت زیر را برای آن در نظر گرفت:

$$u = u(q_۱, q_۲, \dots, q_n)$$

مطلوبیت نهایی کالای  $A_i$  با تابع مطلوبیت  $u = u(q_۱, q_۲, \dots, q_n)$  را با  $MU_i$  نمایش می‌دهیم و عبارتست از:

$$MU_i = \frac{\partial u}{\partial q_i}$$

مثال ۳۵-۵

اگر تابع مطلوبیت یک مصرف کننده برابر با  $u = ۲q_۱^۲q_۲^۲q_۳ - ۴q_۱q_۲^۲$  باشد، آنگاه مطلوبیت نهایی دومین کالا را در حالتی که  $q_۱ = ۲$ ،  $q_۲ = ۴$  و  $q_۳ = ۳$  است، محاسبه کنید.

(حل)

داریم:

$$MU_i = \frac{\partial u}{\partial q_i} = \varepsilon q_1^\varepsilon q_2^\varepsilon q_3^\varepsilon - \lambda q_1 q_2$$

بنابراین :

$$MU_i|_{(2, \varepsilon, 3)} = \varepsilon(2)^\varepsilon (\varepsilon)(3) - \lambda(2)(\varepsilon) = 128. \blacksquare$$



#### تمرین‌های بخش ۵-۵

۱. اگر  $q = \lambda k l^2 + \gamma k l$  تابع تولید با دو عامل نیروی انسانی و سرمایه باشد، آنگاه تولید نهایی نسبت به نیروی انسانی و نسبت به سرمایه را بیابید.

۲. اگر تابع  $C = x^2 y + e^{x+y+1}$  نمایش هزینه‌ی توأم تولید دو کالای A و B باشد، آنگاه هزینه‌ی نهایی تولید آن‌ها را بیابید.

۳. اگر توابع تقاضای دو کالای A و B باقیمت‌های p و q به ترتیب برابر  $x = 3pq + q^2 + p^2$  و  $y = 1 - p - q + pq^3$  باشند، آنگاه توابع تقاضای نهایی این دو کالا را بیابید.

۴. اگر توابع تقاضای دو کالای A و B به ترتیب برابر با  $x = 2e^{-pq}$  و  $y = 3e^{-qp}$  باشد، آنگاه توابع تقاضای نهایی این دو کالا را بیابید.

۵. اگر تابع مطلوبیت یک مصرف کننده برابر با  $u = 100q_1^\gamma q_2^\gamma + 2q_1 q_2$  باشد، آنگاه توابع مطلوبیت نهایی هر سه کالا را بیابید.

#### ۶-۵ ماکسیم و مینیم توابع دو متغیره

در این قسمت به تعمیم مفهوم ماکسیم و مینیم توابع یک متغیره به توابع دو متغیره می‌پردازیم. در حالت یک متغیره از مشتق‌های اول و دوم برای یافتن نقاط ماکسیم و مینیم استفاده کردیم، در این جا نیز مشتق‌های جزئی مرتبه اول و دوم برای یافتن این نقاط به کار خواهند رفت.

## ۵-۶-۱ تعریف

تابع  $z = f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  دارای **ماکسیمم نسبی** است، اگر بتوان دایره‌ای به مرکزین نقطه در دامنه آن طوری یافت که برای هر  $(x, y)$  در این دایره داشته باشیم:

$$f(x, y) \leq f(a, b)$$

همچنین تابع  $f$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  دارای **ماکسیمم مطلق** است، اگر برای

$$\text{هر } (x, y) \in D_f \text{ داشته باشیم: } f(x, y) \leq f(a, b)$$

## ۵-۶-۲ تعریف

تابع  $z = f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  دارای **مینیمم نسبی** است، اگر بتوان دایره‌ای به مرکزین نقطه در دامنه آن طوری یافت که برای هر  $(x, y)$  در این دایره داشته باشیم:

$$f(a, b) \leq f(x, y)$$

همچنین تابع  $f$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  دارای **مینیمم مطلق** است، اگر برای هر

$$\text{هر } (x, y) \in D_f \text{ داشته باشیم: } f(a, b) \leq f(x, y)$$

## ۵-۶-۳ تعریف

اگر تابع دومتغیره‌ی  $f$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  دارای ماکسیمم یا مینیمم نسبی باشد، آنگاه گوییم که در این نقطه دارای یک **اکسترمم نسبی** است. به طریق مشابه در صورتی که تابع دومتغیره‌ی  $f$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  دارای ماکسیمم یا مینیمم مطلق باشد آنگاه در نقطه‌ی مورد نظر دارای یک **اکسترمم مطلق** است.

در ادامه این بحث به بررسی روش یافتن اکسترمم‌های نسبی خواهیم پرداخت. دانشجویان علاقه مند در زمینه‌ی روش‌های یافتن اکسترمم‌های مطلق می‌توانند به کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته مراجعه نمایند.

## ۵-۶-۴ اکسترمم نسبی

روش یافتن اکسترمم توابع دومتغیره تا حدودی مشابه با حالت تک متغیره است. یادآوری می‌کنیم که اگر تابع تک متغیره‌ی  $g(x)$  در نقطه‌ی  $x = a$  دارای اکسترمم نسبی و

در این نقطه مشتق پذیر باشد، آنگاه  $g'(a) = 0$ . برای توابع دو متغیره نیز این حکم برقرار است:

#### ۵-۶-قضیه

اگر تابع دو متغیره  $f$  در نقطه  $(a, b)$  دارای اکسترمم نسبی باشد و مشتقات جزئی آن در این نقطه موجود باشند آنگاه:

$$f_x(a, b) = 0 \quad \text{و} \quad f_y(a, b) = 0$$

#### ۵-۶-تعریف

نقطه  $(a, b)$  که متعلق به دامنه تابع  $f(x, y)$  است، یک **نقطه بحرانی** آن تابع نامیده می شود اگر  $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$  یا حداقل یکی از مشتقات جزئی تابع  $f$  در این نقطه موجود نباشد.

#### تذکره ۵-۵

نقاط بحرانی یک تابع دو متغیره از دو طریق حاصل می شوند:

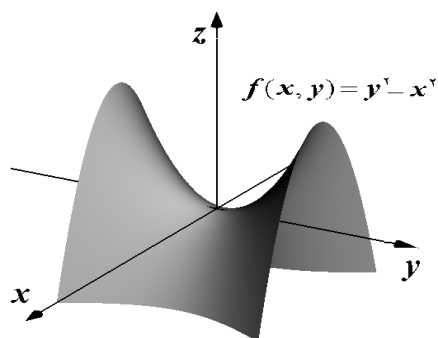
$$(۱) \quad \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \text{حل کردن دستگاه}$$

(۲) یافتن نقاطی در دامنه تابع، که حداقل یکی از مشتقات جزئی مرتبه اول تابع در آن نقاط موجود نباشد.

البته شایان ذکر است که تمام نقاط بحرانی که در این درس مورد توجه ما هستند، از

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \text{حل دستگاه حاصل می شوند.}$$

تعریف و قضیه بالا بیان می کند که اکسترمم های نسبی در نقاط بحرانی رخ می دهد. یعنی نقاط بحرانی یک تابع نامزدی برای اکسترمم نسبی بودن هستند. البته ممکن است برخی از نقاط بحرانی اکسترمم نسبی نباشند. برای مثال تابع  $f(x, y) = y^2 - x^2$  که موسوم به **سه می واره ذلولوی** است را در نظر بگیرید. نمودار این تابع در شکل بعد دیده می شود:



نقطه‌ی  $(0,0)$  یک نقطه‌ی بحرانی تابع مورد نظر است. زیرا:

$$f_x(x, y) = -2x \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = 2y$$

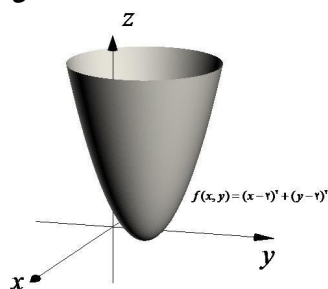
بنابراین باحل دستگاه  $\begin{cases} f_x = -2x = 0 \\ f_y = 2y = 0 \end{cases}$  داریم:  $x = 0$  و  $y = 0$ . یعنی  $(0,0)$  تنها نقطه‌ی بحرانی این تابع است. همان‌طور که از نمودار این تابع دیده می‌شود، این نقطه نه یک ماکسیمم و نه یک مینیمم نسبی است. در واقع نقطه‌ی  $(0,0)$  یک نقطه‌ی زینی تابع مورد نظر است. ■

#### تعریف ۷-۶-۵

تابع  $f(x, y)$  را در نظرگیریم. نقطه‌ی بحرانی  $(a, b)$  را نقطه‌ی زینی این تابع نامیم اگر هر دایره به مرکز  $(a, b)$  هم شامل نقاطی از دامنه‌ی تابع باشد که مقدار تابع در آن نقاط از  $f(a, b)$  بیشتر است و هم نقاطی در دامنه را شامل شود که مقدار تابع در آن نقاط از  $f(a, b)$  کمتر باشد.

#### مثال ۵-۳۶

الف) نمودار تابع  $f(x, y) = (x-2)^2 + (y-2)^2$  در شکل زیر دیده می‌شود:



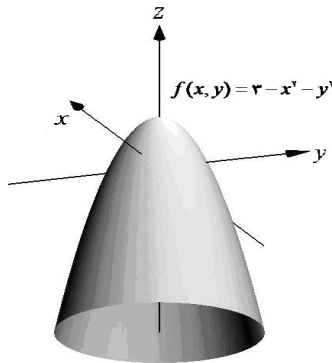
باتوجه به این نمودار، مشاهده می‌شود که این تابع دارای نقطه‌ی اکسترمم از نوع مینیمم

است. برای یافتن مختصات این نقطه و مقدار مینیمم تابع ابتدا دستگاه را 
$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$
 تشکیل می‌دهیم. داریم:

$$\begin{cases} f_x = 2(x-2) = 0 \\ f_y = 2(y-2) = 0 \end{cases}$$

تنها جواب دستگاه فوق نقطه‌ی (۲,۲) است. پس این نقطه همان نقطه‌ی مینیمم نسبی و درواقع مینیمم مطلق تابع داده شده است. اکنون مینیمم مقدار تابع برابر  $f(2,2)$  یعنی عدد صفر است.

ب) نمودار تابع  $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2$  در شکل زیر رسم شده است:



همان‌طور که از این نمودار برمی‌آید، تابع مورد نظر دارای اکسترممی از نوع ماکسیمم است. حال می‌خواهیم این مطلب را به کمک مشتق جزئی نیز نشان دهیم. برای شروع

ابتدا دستگاه را تشکیل می‌دهیم. تنها جواب این دستگاه 
$$\begin{cases} f_x = -2x = 0 \\ f_y = -2y = 0 \end{cases}$$

نقطه‌ی (۰,۰) است. پس نقطه‌ی بحرانی (۰,۰) تنها حالت ممکن برای اکسترمم نسبی بودن است. اما برای هر نقطه دلخواه  $(x,y)$  داریم:

$$f(x,y) = 3 - x^2 - y^2 \leq 3 = f(0,0)$$

پس طبق تعریف، (۰,۰) یک نقطه‌ی ماکسیمم نسبی (مطلق) تابع مورد نظر است. ■

همان‌طور که از مثال فوق مشاهده می‌شود، پی بردن به ماهیت اصلی یک نقطه‌ی بحرانی

و بدون رسم نمودار آن ممکن است چندان کار آسانی نباشد. بنابراین طبیعی است که ریاضیدانان به دنبال معرفی روشی ساده ترو قانونمند برای انجام این امر باشند. در ادامه این بخش به معرفی آزمون مشتقات جزئی مرتبه دوم می‌پردازیم که ابزاری برای یافتن نوع نقاط بحرانی است.

#### ۵-۶-۸ تعریف

فرض کنیم  $f$  تابعی دو متغیره و  $(a, b)$  یک نقطه‌ی بحرانی آن باشد و همچنین مشتقات جزئی مرتبه دوم  $f$  درون دایره‌ای به مرکز این نقطه‌ی بحرانی پیوسته باشند. اگر قرار دهیم  $A = f_{xx}(a, b)$ ،  $B = f_{xy}(a, b)$  و  $C = f_{yy}(a, b)$  آنگاه عدد

$$\Delta(a, b) = AC - B^2$$

را مبین نقطه‌ی بحرانی  $(a, b)$  گوئیم.

#### ۵-۶-۹ قضیه (آزمون مشتقات جزئی مرتبه دوم)

فرض کنیم  $f$  تابعی دو متغیره و  $(a, b)$  یک نقطه‌ی بحرانی آن باشد. در این صورت:  
الف) اگر  $\Delta(a, b) > 0$  و  $A > 0$  آنگاه تابع  $f$  در  $(a, b)$  یک مینیمم نسبی دارد.  
ب) اگر  $\Delta(a, b) > 0$  و  $A < 0$  آنگاه تابع  $f$  در  $(a, b)$  یک ماکسیمم نسبی دارد.  
ج) اگر  $\Delta(a, b) < 0$  آنگاه تابع  $f$  در  $(a, b)$  یک نقطه‌ی زینی دارد.  
د) اگر  $\Delta(a, b) = 0$  آنگاه این آزمون نتیجه‌ای در بر ندارد.

#### مثال ۵-۳۷

نقاط اکسترمم نسبی و زینی تابع

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$$

را در صورت وجود مشخص کنید.

(حل)

ابتدا به تعیین نقاط بحرانی این تابع می‌پردازیم، برای انجام این کار دستگاه

$$\begin{cases} f_x = 6x - 2y = 0 \\ f_y = -2x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

را تشکیل می‌دهیم که معادل با دستگاه دو معادله و دو مجهولی است  $\begin{cases} 6x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 8 \end{cases}$

#### توابع چند متغیره و مشتقات جزئی ۲۰۱

و دارای جواب  $x = 2$  و  $y = 6$  می باشد. یعنی  $(2, 6)$  تنها نقطه‌ی بحرانی تابع داده شده است. اما  $f_{xx} = 6$ ،  $f_{xy} = -2$  و  $f_{yy} = 2$ . بنابراین:

$$A = f_{xx}(2, 6) = 6, \quad B = f_{xy}(2, 6) = -2, \quad C = f_{yy}(2, 6) = 2$$

پس مبین نقطه‌ی بحرانی مورد نظر عبارتست از:

$$\Delta(2, 6) = AC - B^2 = (6)(2) - (-2)^2 = 12 - 4 = 8$$

بنابراین، بنا بر آزمون مشتقات جزئی مرتبه دوم و این که  $\Delta(2, 6) > 0$  و  $A > 0$  نتیجه می شود که تابع  $f$  در نقطه‌ی بحرانی  $(2, 6)$  مینیمم نسبی دارد. ■

#### مثال ۳۸-۵

نقاط اکسترمم نسبی و زینی تابع

$$f(x, y) = 8x^3 - 24xy + y^3$$

را در صورت وجود مشخص کنید.

حل)

$$f_y(x, y) = -24x + 3y^2 \quad \text{و} \quad f_x(x, y) = 24x^2 - 24y$$

بنابراین برای یافتن نقاط بحرانی تابع مورد نظر بایستی که دستگاه

$$\begin{cases} 24x^2 - 24y = 0 \\ -24x + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

را حل کنیم. از معادله‌ی بالایی دستگاه فوق داریم  $y = x^2$  و با قرار دادن این مقدار برای  $y$  در معادله‌ی دوم داریم:

$$-24x + 3(x^2)^2 = 0$$

یا

$$x^4 - 8x = 0$$

که از آن نتیجه می شود:

$$x(x^3 - 8) = 0$$

یا

$$x(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

بنابراین جواب های  $x = 0$  و  $x = 2$  حاصل می شود. حال با قرار دادن  $x = 0$  از

معادله‌ی  $y = x^2$  داریم  $y = 0$  یعنی  $(0,0)$  یک نقطه‌ی بحرانی تابع داده شده است. همچنین با قرار دادن  $x = 2$  در معادله‌ی  $y = x^2$  مقدار  $y = 4$  حاصل می‌گردد. بنابراین  $(2,4)$  یک نقطه‌ی بحرانی دیگر برای تابع مورد نظر است.

اما مشتقات جزئی مرتبه دوم عبارتند از:

$$f_{xx}(x, y) = 4x, f_{xy}(x, y) = -2, f_{yy}(x, y) = 6y$$

پس در نقطه‌ی بحرانی  $(0,0)$  داریم:

$$A = 0, B = -2, C = 0$$

پس مبین این نقطه‌ی بحرانی عبارتست از  $\Delta(0,0) = -576$ . اکنون با توجه به آزمون مشتقات جزئی مرتبه دوم و منفی شدن مقدار مبین نقطه‌ی بحرانی  $(0,0)$  می‌توان نتیجه گرفت که این نقطه یک نقطه‌ی زینی تابع داده شده است.

همچنین در نقطه‌ی بحرانی  $(2,4)$  داریم:

$$A = 96, B = -2, C = 24$$

بنابراین مبین نقطه بحرانی  $(2,4)$  عبارتست از:

$$\Delta(2,4) = AC - B^2 = (96)(24) - (-2)^2 = 1728 > 0$$

حال با توجه به مثبت بودن مقدار  $A$  و آزمون مشتقات جزئی مرتبه دوم، تابع مورد نظر در نقطه‌ی  $(2,4)$  یک مینیمم نسبی دارد. ■

### مثال ۵-۳۹

سه عدد مثبت را طوری بیابید که حاصل جمع آن‌ها ۵۴ و حاصل ضرب آن‌ها ماکسیمم شود.

(حل)

اگر این سه عدد را  $x, y$  و  $z$  بنامیم، آنگاه طبق فرض بایستی  $x + y + z = 54$  و مقدار  $w = xyz$  ماکسیمم شود. از معادله‌ی اول داریم:

$$z = 54 - x - y$$

بنابراین با جایگذاری  $z$  در معادله‌ی دوم بایستی تابع دو متغیره‌ی

$$f(x, y) = xy(54 - x - y) = 54xy - x^2y - xy^2$$

ماکسیمم گردد.

ابتدا با حل دستگاه

$$\begin{cases} f_x = 54y - 2xy - y^2 = 0 \\ f_y = 54x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

نقاط بحرانی تابع مورد نظر را می‌یابیم. دستگاه قبل معادل با دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} y(54 - 2x - y) = 0 \\ x(54 - x - 2y) = 0 \end{cases}$$

از آنجایی که قرار است حاصلضرب سه عدد  $x$ ،  $y$  و  $z$  ماکسیمم شود، پس بایستی هر سه عدد مورد نظر غیرصفر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} 54 - 2x - y = 0 \\ 54 - x - 2y = 0 \end{cases}$$

که با حل آن داریم،  $x = y = 18$  و با قرار دادن این مقادیر در معادله‌ی

$$z = 54 - x - y$$

مقدار  $z = 18$  حاصل می‌گردد. بنابراین سه عدد مورد نظر  $x = 18$ ،  $y = 18$  و  $z = 18$

هستند. ■

#### مثال ۵-۴۰

فرض کنیم  $C(x, y) = x^2 + 3xy^2 - 15x - 12y$  تابع هزینه‌ی توأم برای تولید دو کالای  $A$  و  $B$  با مقادیر به ترتیب  $x$  و  $y$  باشد، میزان تولید روزانه‌ی این دو کالا را طوری بیابید که هزینه‌ی تولید این مؤسسه حداقل شود.

(حل)

$$C_x = 2x + 3y^2 - 15 \quad \text{و} \quad C_y = 6xy - 12$$

بنابراین با تشکیل دستگاه  $\begin{cases} C_x = 2x + 3y^2 - 15 = 0 \\ C_y = 6xy - 12 = 0 \end{cases}$  و حل آن نقاط بحرانی تابع

هزینه را می‌یابیم. دستگاه فوق معادل دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \quad (*)$$

با توجه به اتحاد  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$  و معادلات دستگاه فوق داریم:

$$x + y = \pm 3 \quad \text{یا} \quad (x + y)^2 = 9$$

بنابراین دستگاه(\*) تبدیل به دودستگاه  $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$  و  $\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$  می‌شود که به راحتی قابل حل هستند و با حل آن‌ها چهار نقطه‌ی  $(1, 2)$ ،  $(2, 1)$ ،  $(-1, -2)$  و  $(-2, -1)$  به عنوان نقاط بحرانی تابع هزینه به دست می‌آیند.  
اما:

$$C_{xx}(x, y) = 6x, \quad C_{xy}(x, y) = 6y, \quad C_{yy}(x, y) = 6x$$

بنابراین با توجه به مشتقات جزئی مرتبه دوم جدول زیر را خواهیم داشت:

| نقطه‌ی بحرانی $(a, b)$ | $A(a, b)$ | $B(a, b)$ | $C(a, b)$ | $\Delta(a, b)$ |
|------------------------|-----------|-----------|-----------|----------------|
| $(1, 2)$               | 6         | 12        | 6         | -108           |
| $(2, 1)$               | 12        | 6         | 12        | 108            |
| $(-1, -2)$             | -6        | -12       | -6        | -108           |
| $(-2, -1)$             | -12       | -6        | -12       | 108            |

همان‌طور که از جدول بالا و آزمون مشتقات جزئی مرتبه دوم ملاحظه می‌شود نقاط  $(1, 2)$  و  $(-1, -2)$ ، نقاط زینی تابع هزینه هستند و تابع هزینه در نقطه‌ی  $(2, 1)$  دارای مینیمم نسبی و در نقطه‌ی  $(-2, -1)$  دارای ماکسیمم نسبی است. بنابراین با توجه به خواسته مساله تابع هزینه در حالتی که تولید کالای A برابر ۲ و تولید کالای B برابر یک باشد، حداقل خواهد شد. ■

### تمرین‌های بخش ۵-۶



۱. در هر قسمت ماهیت نقاط بحرانی تابع داده شده را از لحاظ اکسترمم نسبی و نقطه‌ی زینی، مشخص کنید.

الف)  $f(x, y) = x^2 + xy - 2y - 3x + 1$

ب)  $f(x, y) = xy$

ج)  $f(x, y) = xe^y + 1$

$$f(x, y) = 2xy - x^2 - y^2 \quad (د)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{32}{xy} \quad (ه)$$

$$f(x, y) = y \sin x \quad (ز)$$

$$f(x, y) = (x-1)^2 + 2y^2 \quad (ح)$$

۲. سه عدد مثبت را طوری بیابید که حاصل جمع آنها برابر ۳۶ و حاصل ضرب آنها مینیمم گردد.

۳. فرض کنیم  $C(x, y) = 2x^2 + y^2 - 6xy + 10$  تابع هزینهی توأم برای تولید دوکالای A و B با مقادیر به ترتیب x و y باشد، میزان تولید روزانهی این دو کالا را طوری بیابید که هزینهی تولید این مؤسسه حداقل شود.

### ۷-۵ ماکسیم و مینیم توابع چند متغیره مقید

در این بخش به معرفی یک روش جالب برای بهینه سازی یک تابع چند متغیره تحت محدودیت خاصی که به متغیرهای مسأله مربوط می شود، خواهیم پرداخت. این محدودیت می تواند بوسیلهی معادله یا نامعادله بر مسألهی مورد نظر ما تحمیل شده باشد. البته در این بخش تنها حالتی که محدودیت مسأله توسط یک معادله داده شده است را در نظر می گیریم. به طور کلی مسائلی که در این قسمت مورد بحث قرار می گیرند، به دو صورت کلی زیر مطرح خواهند شد:

الف) مسألهی اکسترم دو متغیره با یک محدودیت:

یعنی یافتن ماکسیم یا مینیم تابع دو متغیره  $f(x, y)$  با محدودیت  $g(x, y) = c$ .

ب) مسألهی اکسترم سه متغیره با یک محدودیت:

یعنی یافتن ماکسیم یا مینیم تابع سه متغیره  $f(x, y, z)$  با محدودیت  $g(x, y, z) = c$ .

یک روش ابتدایی برای حل این مسائل، حذف یکی از متغیرها است که پیش از این در مثال ۳۹-۵ نمونه ای از آن را مشاهده کردیم. اکنون به مثال بعد نیز توجه کنید:

## مثال ۵-۴۱

مینیمم تابع  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 8y$  را با محدودیت  $x + y = 2$  بیابید.

(حل)

با توجه به محدودیت مسأله داریم:

$$y = 2 - x$$

بنابراین تابع دو متغیره  $f(x, y)$  به تابع یک متغیره زیرکاهش می‌یابد:

$$g(x) = f(x, 2-x) = x^2 + (2-x)^2 + 8(2-x)$$

برای یافتن مینیمم تابع  $g$  به روش توابع تک متغیره عمل می‌کنیم:

$$g'(x) = 2x - 2(2-x) - 8 = 4x - 12$$

بنابراین از معادله  $g'(x) = 0$  جواب  $x = 3$  بعنوان تنها نقطه بحرانی تابع  $g$  نمایان می‌شود. حال با توجه به این که  $g''(3) > 0$  و بنا به آزمون مشتق دوم برای توابع یک متغیره، تابع  $g$  در  $x = 3$  دارای مینیمم است. حال با قرار دادن این مقدار در رابطه  $y = 2 - x$ ، مقدار  $y = -1$  برای متغیر دیگر حاصل می‌شود. بنابراین مینیمم تابع  $f(x, y)$  با محدودیت  $x + y = 2$  در نقطه  $(3, -1)$  اتفاق می‌افتد که این مقدار مینیمم برابر است با:

$$f(3, -1) = 3^2 + (-1)^2 + 8(-1) = -4. \blacksquare$$

هم‌چنان که مشاهده نمودیم استفاده از روش حذف یکی از متغیرها در مسائل بهینه‌سازی مقید بسیار ساده به نظر می‌رسد، اما حذف یک مجهول ممکن است همیشه مقدور نباشد یا حتی در صورت انجام این امر، ممکن است با مسأله‌ای پیچیده‌تر از حالت اولیه مواجه شویم. بنابراین طبیعی است که ریاضی‌دانان به دنبال روشی دیگر برای حل چنین مسائلی باشند. خوشبختانه این امر در قرن هجدهم میلادی توسط ریاضیدان برجسته‌ی فرانسوی یعنی ژوزف‌لوئیز لاگرانژ به انجام رسید. لاگرانژ در روشی ناب و هوشمندانه با افزودن یک متغیراضافه، راهکاری مفید در حل مسائل بهینه‌سازی توابع چند متغیره‌ی مقید ابداع نمود که هم‌اکنون از آن تحت عنوان روش ضریب لاگرانژ یاد می‌شود و مورد استفاده‌ی دانشمندان بسیاری از علوم قرار می‌گیرد.

### ۵-۷-۲ روش ضریب لاگرانژ

فرض کنیم بخواهیم ماکسیمم یا مینیمم تابع دو متغیره  $f(x, y)$  را با محدودیت  $g(x, y) = c$  پیدا کنیم. لاگرانژ نشان داد که نقطه‌ی اکسترمم تابع  $f$  با محدودیت  $g(x, y) = c$  از حل دستگاه

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x, y) = c \end{cases}$$

که بر حسب  $x, y$  و  $\lambda$  نوشته شده است، حاصل می‌شود. در واقع نقاط به صورت  $(x_0, y_0)$  که از حل دستگاه فوق حاصل می‌شوند، نقاط بحرانی تابع  $f$  با محدودیت  $g(x, y) = c$  هستند. در اینجا به متغیر کمکی  $\lambda$ ، ضریب لاگرانژ گفته می‌شود. در واقع ضریب لاگرانژ همانند یک عنصر کاتالیزور به حل دستگاه بالا کمک می‌کند. البته همچنان که خواهیم دید، این ضریب در مفاهیم اقتصادی دارای تعبیر خاصی است.

### مثال ۵-۴۲

اکسترمم تابع دو متغیره  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  را با محدودیت  $x + y = 1$  بیابید.

(حل)

با توجه به محدودیت  $x + y = 1$ ، پس  $g(x, y) = x + y = 1$  با تشکیل دستگاه

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x, y) = c \end{cases}$$

داریم:

$$\begin{cases} -2x = \lambda(1) \\ -2y = \lambda(1) \\ x + y = 1 \end{cases}$$

دقت کنیم که در این دستگاه  $\lambda \neq 0$ . بنابراین تنها جواب آن عبارتست از:

$$y = \frac{1}{4} \text{ و } x = \frac{1}{4}$$

بنابراین نقطه‌ی  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  یک نقطه‌ی اکسترمم تابع  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  با محدودیت  $x + y = 1$  است. برای مشخص شدن ماهیت این نقطه‌ی اکسترمم می‌توان درحالی بسیار نزدیک این نقطه، نقطه‌ای در دامنه تابع که در شرط  $x + y = 1$  صدق کند را به دلخواه اختیار کرد و از طریق مقایسه‌ی مقدار تابع در آن با مقدار  $f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  به ماهیت نقطه‌ی اکسترمم دست یافت. به عنوان مثال نقطه‌ی  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  که در شرط  $x + y = 1$  صدق می‌کند را در نظر گیریم. با توجه به این که

$$f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = 1 - (\frac{1}{3})^2 - (\frac{2}{3})^2 = 1 - \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

و

$$f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = 1 - (\frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2 = 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

و  $\frac{4}{9} < \frac{7}{8}$  پس ماهیت نقطه‌ی  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  به عنوان یک نقطه‌ی ماکسیمم تابع و با محدودیت  $x + y = 1$  به اثبات می‌رسد که مقدار این ماکسیمم برابر با  $f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{7}{8}$  است. ■

## تذکره ۵-۶

برای تعیین ماهیت نقاط اکسترمم دقت می‌کنیم که اگر تابع مقید مورد نظر تنها دارای یک نقطه‌ی اکسترمم باشد، یک نقطه‌ی کمکی در مجاورت آن اختیار می‌کنیم. سپس با یافتن مقدار تابع در هر دو نقطه و مقایسه‌ی آن‌ها ماهیت اکسترمم مشخص می‌شود.

## مثال ۵-۴۳

ماکسیمم و مینیمم تابع  $f(x, y) = xy$  با محدودیت  $x^2 + y^2 = 1$  را بیابید.

(حل)

با توجه به محدودیت داده شده داریم  $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ .

$$\text{بنابراین با تشکیل دستگاه داریم:} \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x, y) = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \lambda(2x) \\ x = \lambda(2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

بدیهی است که با توجه به آخرین معادله‌ی دستگاه فوق  $x, y$  و  $\lambda$  مخالف صفر هستند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{y}{2x} \\ \lambda = \frac{x}{2y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

از معادله‌ی اول و دوم این دستگاه داریم  $\frac{y}{2x} = \frac{x}{2y}$ ، یعنی  $y^2 = x^2$ . اکنون با قرار دادن این مقدار برای  $y^2$  در آخرین معادله‌ی دستگاه داریم:

$$x^2 + x^2 - 1 = 0$$

یا

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

جواب‌های معادله‌ی اخیر عبارتست از  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . حال با قرار دادن این جواب‌ها در

معادله‌ی  $y^2 = x^2$  جواب‌های  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  حاصل می‌شود. بنابراین طبق روش لاگرانژ

اکسترمم‌های نسبی در نقاط  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ،  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ،  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  و  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  رخ می‌دهد. مقادیر تابع  $f$  در این نقاط عبارتند از:

| $(x, y)$       | $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ | $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ | $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ | $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ |
|----------------|--------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------|
| $f(x, y) = xy$ | $\frac{1}{2}$                              | $-\frac{1}{2}$                              | $-\frac{1}{2}$                              | $\frac{1}{2}$                                |

با توجه به جدول بالا تابع  $f(x, y) = xy$  دارای ماکسیمم  $\frac{1}{4}$  است که در دو نقطه  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  و  $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$  رخ می‌دهد و نیز مینیمم به اندازه  $\frac{-1}{4}$  دارد که در نقاط  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$  و  $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  اتفاق می‌افتد. ■

### تذکره ۵-۷

به‌طور مشابه برای به‌دست آوردن اکسترم‌های تابع سه متغیره  $f(x, y, z)$  با محدودیت  $g(x, y, z) = c$  به روش ضرایب لاگرانژ، کافی است دستگاه

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ f_z = \lambda g_z \\ g(x, y, z) = c \end{cases}$$

را برحسب چهار متغیر  $x, y, z$  و  $\lambda$  حل کنیم. در این صورت نقاط به‌صورت  $(x_0, y_0, z_0)$  از جواب‌های این دستگاه اکسترم‌های تابع  $f(x, y, z)$  با محدودیت  $g(x, y, z) = c$  خواهند بود.

### مثال ۵-۴

ماکسیمم و مینیمم تابع  $f(x, y, z) = 3x + 6y + 2z$  را با محدودیت  $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 70$  بیابید.

(حل)

با توجه به محدودیت داده شده در این مثال، تابع محدودیت به‌صورت زیر است:

$$g(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 = 70$$

$$\text{بنابراین با تشکیل دستگاه داریم: } \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ f_z = \lambda g_z \\ g(x, y, z) = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = \lambda(\varepsilon x) \\ 6 = \lambda(8y) \\ 2 = \lambda(2z) \\ 2x^2 + \varepsilon y^2 + z^2 - v_0 = 0 \end{cases}$$

که از سه معادله‌ی اول آن  $\lambda \neq 0$  بنابراین داریم:

$$x = \frac{3}{\varepsilon\lambda}, \quad y = \frac{3}{\varepsilon\lambda}, \quad z = \frac{1}{\lambda} \quad (*)$$

با قرار دادن این مقادیر در آخرین معادله‌ی دستگاه داریم:

$$2\left(\frac{3}{\varepsilon\lambda}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{3}{\varepsilon\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = v_0$$

یا

$$\frac{9}{\lambda^2} + \frac{9}{\varepsilon\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = v_0$$

که معادل است با  $\frac{35}{8\lambda^2} = v_0$ ، یعنی  $\lambda^2 = \frac{1}{\varepsilon}$  که با حل آن داریم  $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ .

حال با قرار دادن  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$  در معادلات (\*) داریم:

$$x = \frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad y = \frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad z = 1$$

و نیز با قرار دادن  $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$  در این معادلات خواهیم داشت:

$$x = -\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad y = -\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad z = -1$$

بنابراین طبق روش لاگرانژ اکسترم‌های نسبی در نقاط  $(\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}, 1)$  و  $(-\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}, -\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}, -1)$  رخ می‌دهد. مقادیر تابع  $f$  در این نقاط عبارتند از:

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}, 1\right) = 3\left(\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 6\left(\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 2(1) = \frac{35}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$f\left(-\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}, -\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}, -1\right) = 3\left(-\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 6\left(-\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 2(-1) = -\frac{35}{\sqrt{\varepsilon}}$$

بنابراین تابع  $f(x, y, z)$  دارای ماکسیمم  $\frac{35}{\sqrt{\varepsilon}}$  است که در نقطه‌ی  $(\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}, 1)$  رخ می‌دهد و

نیز مینیمم به اندازه‌ی  $-\frac{35}{\sqrt{\varepsilon}}$  دارد که در نقطه‌ی  $(-\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}, -\frac{3}{\sqrt{\varepsilon}}, -1)$  اتفاق می‌افتد. ■

### مثال ۵-۴۵

فرض کنیم تابع تولید یک کارخانه با صرف  $k$  هزار دلار برای سرمایه و  $l$  هزار دلار برای نیروی کار توسط تابع  $q(k, l) = 50k^{\frac{1}{2}}l^{\frac{2}{3}}$  مدلسازی شده باشد. اگر موجودی فعلی شرکت ۱۵۰۰۰۰ دلار باشد، آنگاه این میزان موجودی به چه میزان بین سرمایه و نیروی کار اختصاص یابد تا تولید کارخانه ماکسیمم گردد.

(حل)

با توجه به این که  $k$  و  $l$  در واحد هزار دلار داده شده اند، بنابراین با توجه به موجودی یکصد و پنجاه هزار دلاری کارخانه، محدودیتی به صورت  $k + l = 150$  برای اختصاص این موجودی داریم. بنابراین هدف ما در این مسأله یافتن ماکسیمم تابع  $q(k, l) = 50k^{\frac{1}{2}}l^{\frac{2}{3}}$  با محدودیت  $r(k, l) = k + l = 150$  است. بنابراین با تشکیل

$$\text{داریم: } \begin{cases} q_k = \lambda r_k \\ q_l = \lambda r_l \\ r(k, l) = 150 \end{cases} \quad \text{دستگاه}$$

$$\begin{cases} 25k^{-\frac{1}{2}}l^{\frac{2}{3}} = \lambda(1) \\ 30k^{\frac{1}{2}}l^{-\frac{1}{3}} = \lambda(1) \\ k + l - 150 = 0 \end{cases}$$

از دو معادله‌ی بالایی دستگاه فوق داریم:

$$25k^{-\frac{1}{2}}l^{\frac{2}{3}} = 30k^{\frac{1}{2}}l^{-\frac{1}{3}}$$

که معادل است با  $30k = 25l$  یعنی  $l = \frac{3k}{2}$ . اکنون با قرار دادن این مقدار در معادله‌ی سوم دستگاه داریم  $k = 60$  که از آن نتیجه می‌شود  $l = 90$ . بنابراین تولید ماکسیمم این کارخانه عبارتست از:

$$q(60, 90) = 50(60)^{\frac{1}{2}}(90)^{\frac{2}{3}} = 3826/273502$$

بنابراین ماکسیمم تابع تولید تقریباً برابر با ۳۸۲۶ واحد است و هنگامی اتفاق می‌افتد که ۶۰ هزار دلار به بخش سرمایه و ۹۰ هزار دلار به بخش نیروی کار اختصاص یابد. ■

### ۵-۷-۳ تفسیر ضریب لاگرانژ

دراولین برخورد با روش ضریب لاگرانژ، ظهور متغیر جدید  $\lambda$  می‌تواند باعث ایجاد سردرگمی گردد اما با ارائه‌ی تعریف واضحی برای آن می‌توان تفسیر اقتصادی مفیدی از موضوع داشت.

در مسأله‌ی یافتن ماکسیمم مقید تابع دو متغیره‌ی  $f(x, y)$  با محدودیت  $g(x, y) = c$ ، تغییر در ثابت  $c$  از معادله‌ی محدودیت  $g(x, y) = c$  اغلب باعث تولید یک مقدار ماکسیمم دیگر برای تابع هدف یعنی  $f$  خواهد شد. ضریب لاگرانژ در این مسأله بیان‌کننده‌ی میزان تغییر در ماکسیمم  $f$  به ازای یک واحد تغییر در مقدار ثابت معادله‌ی محدودیت یعنی  $c$  است. به عبارت دیگر داریم:

$$\lambda = \frac{df}{dc}$$

به عنوان نمونه در مثال ۵-۴ مقدار ضریب  $\lambda$  برابر است با:

$$\lambda = 20(60)^{-\frac{2}{3}}(90)^{\frac{2}{3}} = 25/50849001$$

بنابراین یک افزایش ۱۰۰۰ دلاری (یک واحدی) در موجودی فعلی شرکت باعث افزایش ماکسیمم تابع تولید به میزان تقریبی  $25/51 = \lambda$  واحد (یعنی از ۳۸۲۶/۲۷ به ۳۸۵۱/۷۸) خواهد شد.

به همین ترتیب در یک مسأله‌ی مینیمم سازی مقید، ضریب لاگرانژ بیان‌کننده‌ی میزان تغییر در حداقل تابع  $f$  به ازای یک واحد تغییر در عدد ثابت تابع محدودیت یعنی  $c$  است. ■

### تمرین‌های بخش ۵-۷

۱. به کمک روش ضریب لاگرانژ اکسترمم توابع داده شده با محدودیت‌های موردنظر رابیاپید.

الف) ماکسیمم تابع  $f(x, y) = xy$  با محدودیت  $2x + 2y = 5$

ب) مینیمم تابع  $f(x, y) = x^2 + y^2$  با محدودیت  $x + y = 24$

ج) ماکسیمم تابع  $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$  با محدودیت  $x + 2y = 6$

د) مینیمم تابع  $f(x, y) = x^2 - y^2$  با محدودیت  $x^2 + y^2 = 4$

- ه) ماکسیمم تابع  $f(x, y) = \cos x + \cos y$  با محدودیت  $y = x + \frac{\pi}{4}$
- و) مینیمم تابع  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  با محدودیت  $x - 2y + 3z = 4$
- ز) ماکسیمم تابع  $f(x, y, z) = xyz$  با محدودیت  $3x + 2y + z = 6$
- ح) مینیمم تابع  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  با محدودیت  $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$
۲. عدد ۱۲ را به صورت مجموع سه عدد مثبت  $x, y$  و  $z$  طوری بنویسید که حاصلضرب  $xy^2z$  ماکسیمم شود.
۳. فرض کنیم  $k$  هزار دلار صرف تجهیزات سرمایه ای و  $l$  هزار دلار صرف نیروی کار انسانی یک کارخانه شود و تابع تولیدی به صورت  $q(k, l) = 60k^{\frac{1}{3}}l^{\frac{2}{3}}$  برای آن داشته باشیم. اگر موجودی فعلی شرکت ۱۲۰ هزار دلار باشد، آنگاه:
- الف) به چه میزان بودجه بین نیروی کار انسانی و تجهیزات سرمایه ای شرکت تخصیص یابد تا تابع تولید ماکسیمم گردد.
- ب) به کمک ضریب لاگرانژ میزان تغییر در ماکسیمم تابع تولید کارخانه را به ازای افزایش یک هزار دلاری در بودجهی فعلی شرکت، تخمین بزنید.



### تمرین های گوناگون فصل پنجم

۱. اگر  $f(x, y, z) = x^2ye^z + (x + 2y - z)^2$  آنگاه مطلوب است:
- الف)  $f(0, 0, 0)$     ب)  $f(1, -1, 1)$     ج)  $f(-1, 1, -1)$
- د)  $\frac{d}{dx}f(x, x, x)$     ه)  $\frac{d}{dy}f(1, y, 2y)$     و)  $\frac{d}{dz}f(1, 1, \sin z)$
۲. دامنه ی هر یک از توابع زیر را بیابید.
- الف)  $f(x, y) = \sqrt{y - x}$     ب)  $f(u, v) = \sqrt{\frac{u}{v}}$
- ج)  $f(x, y) = \ln(y - x)$     د)  $f(x, y) = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$
- ه)  $f(x, y) = e^{\frac{(1-x)}{y}}$     و)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$
- ز)  $f(x, y) = \frac{2}{\sqrt{x}} \frac{y}{\sqrt{y-1}}$     ح)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+y}}$

۳. حدود زیر را بیابید.

|                                                                    |                                                                                 |
|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| (الف) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} (xy^2 + x^2y + 5)$          | (ب) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (2x^2 + 2xy - 3y - 1)$                      |
| (ج) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} \frac{x+y}{x-y}$               | (د) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$                 |
| (ه) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{x+y}$                       | (و) $\lim_{(x,y) \rightarrow (e,0)} \ln(x^2 + y^2)$                             |
| (ز) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x+y}$  | (ح) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} \frac{(x^2 - 2)(y - 1)}{(x + 2)(1 - y^2)}$ |
| (ط) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{\sin(x + 2y)}{2x + 4y}$ | (ی) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2}$                |

۴. در هر قسمت نشان دهید  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  موجود نیست.

|                                                |                                          |
|------------------------------------------------|------------------------------------------|
| (الف) $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ | (ب) $f(x,y) = \frac{x - y^2}{x^2 + y^2}$ |
| (ج) $f(x,y) = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$       | (د) $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ |

۵. اگر تابع  $f$  به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

آنگاه در پیوستگی آن در نقطه  $(0,0)$  بحث کنید.

۶. مقدار  $A$  را طوری بیابید که تابع

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ A & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

در  $(0,0)$  پیوسته باشد.

۷. در هر یک از قسمت‌های زیر مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم را بیابید.

|                                   |                               |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| (الف) $f(x,y) = xy + 2x + 2y + 3$ | (ب) $f(x,y) = (x - y + xy)^2$ |
| (ج) $f(x,y) = \frac{2x}{x - y}$   | (د) $f(x,y) = xe^y + 2xy$     |
| (ه) $f(x,y) = \ln(3x - 4y)$       | (و) $f(x,y) = \cos(\sin xy)$  |

۸. مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم توابع سه متغیره‌ی زیر را بیابید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & f(x, y, z) = (x + y + \sqrt[3]{z})^{\frac{2}{5}} \\ \text{ب)} & f(x, y, z) = \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{z}} \\ \text{ج)} & f(x, y, z) = \sin(\sqrt[3]{x}) + \cos(yz) \\ \text{د)} & f(x, y, z) = \frac{xy + yz}{xz} \\ \text{ه)} & f(x, y, z) = \cos(xyz) \\ \text{و)} & f(x, y, z) = \frac{\sqrt[3]{x} + y + z}{e^{xyz}} \end{array}$$

۹. در هر یک از قسمت‌های زیر  $\frac{\partial z}{\partial x}$  و  $\frac{\partial z}{\partial y}$  را به کمک مشتق ضمنی بیابید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1 \\ \text{ب)} & \sqrt[3]{x} + 5\sqrt[3]{y} + 3\sqrt[3]{z} = 8 \\ \text{ج)} & \sqrt{x + y} + \cos z = 4 \\ \text{د)} & \ln(xy + yz + zx) = 3 \end{array}$$

۱۰. دیفرانسیل کلی توابع زیر را بیابید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & f(x, y) = \cos xy \\ \text{ب)} & f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y^2} - x^4 y \\ \text{ج)} & f(x, y) = \tan x + \cot y \\ \text{د)} & f(x, y) = \frac{x + y}{x - y} \\ \text{ه)} & f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^2} - 4y^2 + \sqrt{2xz} \end{array}$$

۱۱. در هر یک از توابع زیر  $\frac{df}{dt}$  را بیابید.

$$\text{الف)} \quad f(x, y) = 5xy + y^3 \quad \text{که در آن } x = -3t^4 \text{ و } y = 1 + 2t.$$

$$\text{ب)} \quad f(x, y) = (3 + y^2)x \quad \text{که در آن } x = e^t \text{ و } y = \sqrt{t}.$$

$$\text{ج)} \quad f(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{که در آن } x = \sin t \text{ و } y = \cos t.$$

$$\text{د)} \quad f(x, y) = xy^2 \quad \text{که در آن } x = \cos(t + 1) \text{ و } y = \tan 2t.$$

۱۲. در هر یک از توابع زیر  $\frac{\partial f}{\partial u}$  و  $\frac{\partial f}{\partial v}$  را بیابید.

$$\text{الف)} \quad f(x, y) = x + y^2 \quad \text{که در آن } x(u, v) = u + 2v \text{ و } y(u, v) = (uv)^2.$$

$$\text{ب)} \quad f(x, y) = e^{xy} \quad \text{که در آن } x(u, v) = u - v \text{ و } y(u, v) = u + v.$$

$$\text{ج)} \quad f(x, y) = \ln xy \quad \text{که در آن } x(u, v) = e^{uv^2} \text{ و } y(u, v) = e^{uv}.$$

$$\text{د)} \quad f(x, y) = \frac{x}{y} \quad \text{که در آن } x(u, v) = \frac{1}{u + v} \text{ و } y(u, v) = \frac{1}{u - v}.$$

۱۳. اگر  $w = \ln(2x - y^2 + z)$ ،  $x = 2t + 3$ ،  $y = \sqrt{t}$  و  $z = \frac{1}{t}$  آنگاه  $\frac{dw}{dt}$  را بیابید.

۱۴. اگر  $z = uv + f(uv)$  آنگاه نشان دهید:

$$u \frac{\partial z}{\partial u} - v \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

۱۵. اگر  $z = f(uv^2)$  آنگاه نشان دهید که:

$$2u \frac{\partial z}{\partial u} - v \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

۱۶. اگر  $w = f\left(\frac{r-s}{s}\right)$  آنگاه نشان دهید :

$$r \frac{\partial w}{\partial r} + s \frac{\partial w}{\partial s} = 0$$

۱۷. اگر  $z = xy + f(x^2 + y^2)$  آنگاه نشان دهید:

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$$

۱۸. اگر  $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$  که در آن  $c$  عددی ثابت است، آنگاه نشان دهید  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ .

۱۹. به کمک آزمون مشتقات جزئی مرتبه دوم نقاط اکسترمم و زینی توابع زیر را در صورت وجود، مشخص کنید.

الف)  $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^2 + 2$  ب)  $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$

ج)  $f(x, y) = e^{-x} \sin y$  د)  $f(x, y) = (1 + x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}$

ه)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$  و)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{76}{x+y}$

۲۰. به کمک روش ضریب لاگرانژ، ماکسیمم و مینیمم مقدار تابع  $f$  با محدودیت داده شده را بیابید و در هر قسمت نقاطی که این اکسترممها در آن رخ می دهد را تعیین کنید.

الف)  $f(x, y) = xy$  با محدودیت  $4x^2 + 8y^2 = 64$

ب)  $f(x, y) = 4x^2 + y^2$  با محدودیت  $2x^2 + y^2 = 1$

ج)  $f(x, y) = 3x + 6y + 2z$  با محدودیت  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

د)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  با محدودیت  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$