

فصل اول

گزاره‌ها

اهداف:

در پایان این فصل انتظار می‌رود:

- دانشجو با مفهوم گزاره و انواع آن آشنا شود.
- توان تجزیه، تحلیل و ترکیب گزاره‌نما را داشته باشد.
- با استفاده از پیوندهنده‌ها بتواند گزاره‌های ترکیبی را ایجاد نماید.
- از جدول درستی به عنوان روشی برای نمایش عبارت‌های منطقی استفاده نماید.
- با گزاره‌های همیشه درست و همیشه نادرست آشنا شود.
- با مفاهیم استلزام و استنتاج منطقی آشنا و قدرت بکارگیری آن را در مسائل روزمره و طبیعی داشته باشد.
- با روش‌های اثبات مانند برهان خلف و استقرا آشنا شود.
- با سورها و نحوه به‌کار بردن آن‌ها آشنا شود.

۱-۱- تعریف گزاره

در ریاضی برای بیان احکام از جملاتی استفاده می‌شود که می‌توان درستی یا نادرستی این جملات را بیان نمود و یا اینکه با داشتن اطلاعات کافی، پیرامون درست یا نادرست بودن آنها نظر داد. این دسته از جملات گزاره نامیده می‌شوند. بنابراین:

 **گزاره:** یک جمله ساده خبری است که به جملات ساده‌تر تجزیه نمی‌شود و دارای ارزش درست یا نادرست است.

جهت نمایش گزاره از حروف کوچک الفبای لاتین مانند p, q, r استفاده می‌شود. برای نمایش ارزش درست گزاره از T (True) یا عدد ۱ و جهت نمایش ارزش نادرست آن از F (False) یا عدد ۰ نیز استفاده می‌شود.

مثال ۱-۱:

کدام یک از عبارات زیر گزاره هستند؟ در صورت گزاره بودن، ارزش آن‌ها چیست؟

p : مریخ جزء منظومه شمسی است.

z : علی حاتمی یک کارگردان ایرانی است.

q : آن معادله را حساب کن.

r : درس ساختمان گسسته آسان است.

حل:

عبارت p گزاره است و ارزش آن درست است.

عبارت q گزاره است و ارزش آن درست است.

عبارت q گزاره نمی‌باشد. زیرا گزاره باید جمله خبری باشد.

عبارت r گزاره نیست، زیرا آسان بودن تعریف نشده است و نمی‌توان درباره درست یا نادرست بودن آن بحث نمود.



۲-۱- گزاره‌نما

 **گزاره‌نما:** اگر گزاره‌ای شامل متغیر باشد و به ازای بعضی مقادیر متغیر، ارزش گزاره T و به ازای برخی دیگر ارزش آن F شود، آن را گزاره‌نما می‌نامند. برای نمایش گزاره‌نمای " x عددی اول است" از نماد $p(x)$ (یا $q(x)$ یا $r(x)$) استفاده می‌شود.

مثال ۲-۱:

- x مؤلف کتاب ساختمان گسسته است.
در عبارت فوق اگر x را از مجموعه مؤلفین کتاب ساختمان گسسته انتخاب نماییم، این گزاره‌نما تبدیل به گزاره با ارزش T و در غیر اینصورت تبدیل به گزاره با ارزش F می‌شود. بنابراین عبارت فوق یک گزاره نما است.
- $x=11$ (در مجموعه اعداد حقیقی) یک گزاره‌نما است. این گزاره‌نما به ازای بعضی مقادیر حقیقی x ارزش T و به ازای بعضی مقادیر دیگر مانند $x=5$ ، دارای ارزش F است.
- x عدد اول است.
در عبارت فوق اگر x از مجموعه اعداد اول انتخاب شود، گزاره‌نما دارای ارزش درست است و اگر عددی غیراول انتخاب شود، گزاره‌نما دارای ارزش نادرست خواهد بود.



۳-۱- استفاده از روابط منطقی جهت ایجاد گزاره‌های مرکب

 **گزاره ساده:** گزاره‌ای است که قابل تجزیه به گزاره‌های کوچک‌تر نمی‌باشد. مانند گزاره p در مثال ۱-۱.

 **گزاره مرکب:** گزاره مرکب، گزاره‌ای است که از ترکیب گزاره‌های ساده با استفاده از یک سری روابط و عملگرهای منطقی (الفاظ پیونددهنده) حاصل می‌شود. به گزاره‌های مرکب، فرمول گزاره‌ای نیز گفته می‌شود. در یک گزاره مرکب، هر یک از گزاره‌های ساده موجود، یک مؤلفه نامیده می‌شود.

در ادامه، الفاظ پیونددهنده‌ای که برای ساخت فرمول‌های گزاره‌ای استفاده

می‌شوند، معرفی می‌شوند. قبل از تعریف الفاظ پیونددهنده، جدول درستی به عنوان ابزاری جهت نمایش ارزش گزاره‌ها معرفی می‌شود.

 **جدول درستی:** در فرمول‌های گزاره‌ای با جایگزینی مقادیر F و T بجای هر یک از مؤلفه‌ها، یک نمونه از فرمول استخراج می‌شود. بدیهی است جایگزینی حالت‌های مختلف هر یک از مؤلفه‌ها جهت استخراج تمام نمونه فرمول‌ها کارساده‌ای نیست؛ بدین منظور جدولی تحت عنوان جدول درستی معرفی می‌شود. جدول درستی، روشی برای تحلیل درستی فرمول‌های گزاره‌ای به ازای کلیه حالت‌های مؤلفه‌های آن می‌باشد. تعداد ردیف‌های این جدول با تعداد گزاره‌های پایه مرتبط است. اگر یک گزاره مدنظر باشد، این یک گزاره تنها دارای حالت درست یا نادرست می‌باشد، از این‌رو جدول گزاره آن، دو ردیف بیشتر نخواهد داشت. بدین ترتیب برای n گزاره، 2^n ردیف در جدول وجود خواهد داشت.

 **نقیض یا نفی یک گزاره:** نقیض گزاره p که با علامت $\neg p$ (یا $\sim p$) نشان داده می‌شود، گزاره‌ای است که ارزش آن مخالف ارزش گزاره p است. نقیض گزاره به این صورت بیان می‌شود "چنین نیست که p ".

جدول ۱-۱، جدول درستی نقیض یک گزاره را نشان می‌دهد. برای هر حالت ممکن گزاره p ، یک ردیف در این جدول قرار گرفته است. در هر ردیف ارزش $\neg p$ به‌ازای ارزش p نشان داده شده است.

جدول ۱-۱. جدول درستی نقیض گزاره

p	$\neg p$
F	T
T	F

 **مثال ۱-۳:**

نقیض گزاره p را بیابید.

p : متغیر x_{12} یک نام متغیر معتبر در زبان C است.

حل:

"چنین نیست که متغیر x_{12} یک نام متغیر متعبر در زبان C است." یا به عبارت دیگر "متغیر x_{12} یک نام متغیر معتبر در زبان C نیست."



ترکیب عطفی: اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب عطفی دو گزاره با $p \wedge q$ نشان داده می‌شود. ارزش گزاره مرکب حاصل از ترکیب عطفی دو گزاره زمانی درست است که هر دو گزاره دارای ارزش درست باشند؛ در غیر این صورت ارزش گزاره مرکب $p \wedge q$ نادرست خواهد بود. ترکیب عطفی با نماد AND و $\cdot$ نیز نشان داده می‌شود. جدول درستی گزاره مرکب $p \wedge q$ در جدول ۱-۲ نشان داده شده است.

جدول ۱-۲. جدول درستی ترکیب عطفی دو گزاره

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

ترکیب فصلی: اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب فصلی دو گزاره با $p \vee q$ نشان داده می‌شود. ارزش گزاره مرکب حاصل از ترکیب فصلی دو گزاره زمانی نادرست است که هر دو گزاره توأمأ دارای ارزش نادرست باشند؛ در غیر این صورت ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ درست خواهد بود. ترکیب فصلی با نماد OR یا $+$ نیز نشان داده می‌شود. جدول درستی گزاره مرکب $p \vee q$ در جدول ۱-۳ نشان داده شده است.

جدول ۱-۳. جدول درستی ترکیب فصلی دو گزاره

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

ترکیب NAND: اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب $NAND$ دو گزاره با $p \uparrow q$ نشان داده می‌شود. این ترکیب در حقیقت، ترکیب نقیض عطفی یک گزاره است. یعنی:

$$p \uparrow q = \neg(p \wedge q)$$

جدولِ درستی گزارهٔ مرکب $p \uparrow q$ در جدول ۴-۱ نشان داده شده است.

جدول ۴-۱. جدول درستی ترکیب $NAND$

p	q	$p \uparrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	F

ترکیب NOR : اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب NOR دو گزاره با $p \downarrow q$ نشان داده می‌شود. این ترکیب در حقیقت، ترکیب نقیض فصلی یک گزاره است. یعنی:

$$p \downarrow q = \neg(p \vee q)$$

جدولِ درستی گزارهٔ مرکب $p \downarrow q$ در جدول ۵-۱ نشان داده شده است.

جدول ۵-۱. جدول درستی ترکیب NOR

p	q	$p \downarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

ترکیب XOR : اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب XOR دو گزاره با $p \oplus q$ نشان داده می‌شود. به این ترکیب OR انحصاری نیز گفته می‌شود. ارزش این ترکیب وقتی درست است که از بین دو گزاره، منحصرأً یکی ارزش درست داشته باشد. بنابراین اگر p و q توأمأً درست یا توأمأً نادرست باشند، ارزش $p \oplus q$ نادرست خواهد بود.

جدولِ درستی گزارهٔ مرکب $p \oplus q$ در جدول ۶-۱ نشان داده شده است.

جدول ۶-۱. جدول درستی ترکیب $p \oplus q$

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

 **ترکیب شرطی:** اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب شرطی دو گزاره با $p \rightarrow q$ نشان داده می‌شود. ارزش گزاره شرطی $p \rightarrow q$ فقط زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد؛ در مابقی موارد این ترکیب ارزش درست خواهد داشت. در گزاره شرطی $p, p \rightarrow q$ را مقدم و q را تالی نامند و گفته می‌شود "اگر p آن‌گاه q "؛ یا اینکه " p شرط کافی برای q است"؛ یا اینکه " q شرط لازم برای p است".

جدول درستی گزاره شرطی جدول ۷-۱ نشان داده شده است.

جدول ۷-۱. جدول درستی ترکیب $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

 **توجه:**

همانطور که در جدول ۷-۱ نشان داده شده است، در صورتی که قسمت مقدم شرط یعنی p نادرست باشد، فارغ از ارزش q ، گزاره $p \rightarrow q$ دارای ارزش درست خواهد بود. بنابراین در گزاره‌های شرطی اگر قسمت مقدم دارای ارزش نادرست باشد، گزاره شرطی دارای ارزش درست خواهد بود و نیازی به بررسی ارزش قسمت تالی نخواهد بود. در این صورت گوئیم گزاره $p \rightarrow q$ به انتفاء مقدم درست است.

 **عکس نقیض:** گزاره $q \rightarrow p$ ، عکس گزاره $p \rightarrow q$ و گزاره $\neg q \rightarrow \neg p$ عکس نقیض گزاره $p \rightarrow q$ نامیده می‌شوند. جدول درستی عکس و عکس نقیض دو گزاره p و q در جدول ۸-۱ نشان داده شده است. با توجه به این جدول مشخص می‌شود که ارزش هر گزاره شرطی و عکس نقیض آن با هم برابر است. اما گزاره شرطی و عکس آن وقتی هم‌ارزش هستند که قسمت مقدم و تالی شرط هر دو ارزش درست یا هر دو ارزش نادرست داشته باشند.

جدول ۸-۱ جدول درستی معکوس و عکس نقیض گزاره $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg q \rightarrow \neg p$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	T
T	F	F	T	F
T	T	T	T	T

 **ترکیب دوشروطی:** اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب دوشروطی دو گزاره با $p \leftrightarrow q$ نشان داده می‌شود. اگر دو گزاره p و q توأمآ ارزش درست، یا توأمآ ارزش نادرست داشته باشند، گزاره دو شرطی $p \leftrightarrow q$ دارای ارزش درست خواهد بود. گزاره دوشروطی به صورت " p اگر و فقط اگر q "; یا اینکه " p شرط لازم و کافی برای q است" بیان می‌شود.

جدول درستی گزاره دو شرطی جدول ۹-۱ نشان داده شده است.

جدول ۹-۱ جدول درستی ترکیب $p \leftrightarrow q$

P	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

 **مثال ۴-۱:**

گزاره‌های ساده زیر را به همراه ارزش آنها درنظر بگیرید:

- p : هر بایت از ۷ بیت تشکیل شده است (F).
 - q : فروردین ۳۱ روز است (T).
 - s : کامپایلر پیش‌نیاز مبانی کامپیوتر است (F).
- تأثیر عملگرهای ترکیبی به صورت زیر است:
- الف) $\neg p$: چنین نیست که هر بایت، از ۷ بیت تشکیل شده باشد (ارزش T).
- ب) $p \wedge q$: هر بایت از ۷ بیت تشکیل شده است و فروردین ۳۱ روز است:

$$\left. \begin{array}{l} p: \text{هر بایت از ۷ بیت تشکیل شده است} \equiv F \\ q: \text{فروردین ۳۱ روز است} \equiv T \end{array} \right\} p \wedge q \equiv F \wedge T \equiv F$$
 در نتیجه ارزش $p \wedge q$ برابر با F است.

(ج) $p \vee s$: هر بایت از ۷ بیت تشکیل شده است یا کامپایلر پیش نیاز مبانی کامپیوتر است.

$$\left. \begin{array}{l} p: \text{هر بایت از ۷ بیت تشکیل شده است} \equiv F \\ s: \text{کامپایلر پیش نیاز مبانی کامپیوتر است} \equiv F \end{array} \right\} p \vee s \equiv F \vee F \equiv F$$
 در نتیجه ارزش $p \vee s$ برابر با F است.

(د) $p \oplus q$: یا هر بایت از ۷ بیت تشکیل شده است یا فروردین ۳۱ روز است:

$$\left. \begin{array}{l} p: \text{هر بایت از ۷ بیت تشکیل شده است} \equiv F \\ q: \text{فروردین ۳۱ روز است} \equiv T \end{array} \right\} p \oplus q \equiv F \oplus T \equiv T$$
 در نتیجه ارزش $p \oplus q$ برابر با T است.

(ه) $p \uparrow q$ برابر T است.



نکته:

عملگرهای منطقی نسبت به یکدیگر دارای اولویت هستند (جدول ۱-۱۰). غیر از این از پراتزگذاری نیز می‌توان برای ایجاد اولویت استفاده نمود. اگر در یک گزاره بیش از یک عملگر از یک نوع باشد، ترتیب عملگرها از چپ به راست در نظر گرفته می‌شود.

جدول ۱-۱۰. اولویت عملگرهای منطقی

اولویت	عملگر
۱	$\neg$
۲	$\wedge$
۳	$\vee$
۴	$\rightarrow$
۵	$\leftrightarrow$

مثال ۵-۱:

اگر ارزش گزاره‌های P, Q, R به ترتیب T, T, F باشند، ارزش گزاره‌های زیر را به دست آورید:

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R) \quad \text{ب)} \quad P \rightarrow Q \vee R \quad \text{الف)}$$

حل:

با توجه به اولویت عملگرها خواهیم داشت:
(الف)

$$\begin{aligned} P \rightarrow Q \vee R &\equiv T \rightarrow T \vee F \\ &\equiv T \rightarrow T \\ &\equiv T \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R) &\equiv (T \rightarrow (T \rightarrow F)) \rightarrow (T \rightarrow F) \\ &\equiv (T \rightarrow F) \rightarrow (T \rightarrow F) \\ &\equiv F \rightarrow (T \rightarrow F) \\ &\equiv F \rightarrow F \\ &\equiv T \end{aligned}$$



مثال ۶-۱:

اگر گزاره‌های p, q, r به ترتیب دارای ارزش T, F, T باشند، ارزش گزاره‌های زیر را به دست آورید.

$$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (r \leftrightarrow p) \quad \text{ب)} \quad (\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \quad \text{الف)}$$

حل:

(الف)

$$\begin{aligned} (\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) &\equiv (\neg T \leftrightarrow \neg F) \leftrightarrow (F \leftrightarrow T) \\ &\equiv (F \leftrightarrow T) \leftrightarrow (F \leftrightarrow T) \\ &\equiv F \leftrightarrow F \\ &\equiv T \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} (p \rightarrow \neg q) \rightarrow (r \leftrightarrow p) &\equiv (T \rightarrow \neg F) \rightarrow (T \leftrightarrow T) \\ &\equiv (T \rightarrow T) \rightarrow (T \leftrightarrow T) \\ &\equiv T \rightarrow T \\ &\equiv T \end{aligned}$$



مثال ۷-۱:

دستورات زیر که یک عبارت شرطی در زبان برنامه نویسی C است را در نظر بگیرید:

```
if (x > 10)
    y = 5;
```

با توجه به مقدار x ، شرط $x > 10$ ممکن است درست یا نادرست باشد و در نتیجه مقدار y می‌تواند متفاوت باشد. در حقیقت این دستور یک گزاره شرطی است. حالت‌های ممکن در مورد مقادیر x و y بصورت زیر است:

- اگر مقدار x بزرگ‌تر از ۱۰ باشد، قطعاً مقدار y برابر ۵ خواهد بود.
 - اما اگر مقدار x بزرگ‌تر از ۱۰ نباشد، وضعیت مقدار y چه خواهد بود؟ این مقدار می‌تواند هر عددی باشد. در اینجا یک سوال مطرح می‌شود: آیا ممکن است در حالتی که مقدار x بزرگ‌تر از ۱۰ نباشد، مقدار y بعد از اجرای دستورات فوق باز هم ۵ باشد؟ پاسخ مثبت است. زیرا ممکن است قبل از این دستورات y مقدار ۵ داشته باشد. نمایش این دستورات در قالب گزاره به صورت زیر است:
- p : شرط $x > 10$ برقرار باشد.
- q : مقدار y برابر ۵ باشد (بعد از اجرای دستورات فوق و در هر شرایطی).

جدول ۱۱-۱.

P	q	$p \rightarrow q$	توضیح
F	F	T	اگر شرط $x > 10$ برقرار نباشد، مقدار y می‌تواند ۵ نشود. (یعنی مقدار y قبل از این دستورات مقداری مخالف ۵ بوده است)، و این منطقی است.
F	T	T	اگر شرط $x > 10$ برقرار نباشد، مقدار y می‌تواند ۵ باشد. (یعنی مقدار y قبل از این دستورات ۵ بوده است) و این منطقی است.
T	F	F	اگر شرط $x > 10$ برقرار باشد، قطعاً باید مقدار y برابر ۵ شود. بنابراین بعد از برقراری شرط $x > 10$ ، احتمال اینکه مقدار y برابر ۵ نشود، محال است.
T	T	T	اگر شرط $x > 10$ برقرار باشد، قطعاً باید مقدار y برابر ۵ شود، و این حالت نیز حالت درستی است.

پس تنها حالتی که در گزاره‌های شرطی با نتیجه F مواجه خواهیم شد، زمانی است که قسمت مقدم درست و قسمت تالی نادرست باشد.



مثال ۸-۱:

در قطعه برنامه‌های زیر اگر مقدار $m=2$, $n=3$, $k=6$, $x=0$ باشند، آیا دستور $x++$ اجرا خواهد شد یا خیر؟ (علامت $||$ نشان‌دهنده یا و علامت $!$ نشان‌دهنده نقیض است).

(الف)

(ب)

while ($!(m + n)$) $x--;$ **else** $x++;$ **if** ($(m < n) || (k > 41)$) $x--;$ **else** $x++;$

حل:

(الف) دستور $x++$ وقتی اجرا خواهد شد که عبارت $(m < n) || (k > 41)$ دارای ارزش نادرست باشد.

$$(m < n) || (k > 41) \equiv (2 < 3) \vee (6 > 41)$$

$$\equiv T \vee F$$

$$\equiv T$$

از آنجا که این عبارت ارزش درست دارد، بنابراین دستور $x++$ اجرا نخواهد شد.

(ب) در این قطعه برنامه $x++$ وقتی اجرا خواهد شد که عبارت $!(m + n)$ ارزش درست نداشته باشد. یعنی $!(m + n)$ برابر F (صفر) باشد، به عبارتی $(m + n)$ برابر T (مخالف صفر) باشد.

$$!(m + n) \equiv \neg (2 + 3)$$

$$\equiv \neg (5)$$

$$\equiv \neg T$$

$$\equiv F$$

بنابراین در این قطعه برنامه، دستور $x++$ اجرا خواهد شد.



مثال ۹-۱:

اکثر موتورهای جستجوی صفحات وب از تکنیکی به نام "جستجوی بولی" استفاده می‌کنند. این تکنیک جهت پیدا نمودن موضوعات مشخص در صفحات وب استفاده می‌شود.

در جستجوی بولی، پیونددهنده *AND* برای پیدا کردن رکوردهایی که شامل تمامی موارد مورد جستجو هستند، استفاده می‌شود. در این نوع جستجو از *OR* برای پیدا کردن رکوردهایی استفاده می‌شود که شامل یک یا چند گزینه مورد جستجو باشد. در روش جستجوی بولی از *NOT* برای جستجوی رکوردهایی استفاده می‌شود که شامل گزینه مخصوصی نباشد.

به‌عنوان نمونه اگر کاربری به دنبال اطلاعاتی پیرامون دانشگاه‌های موجود در استان تهران باشد، می‌تواند در جستجوی خود عبارت زیر را به کار برد:

Province AND Tehran AND Universities

نتیجه این جستجو شامل صفحاتی خواهد بود که هر سه کلمه *Province* و *Tehran* و *Universities* در آن‌ها باشد (توجه داشته باشید که در بسیاری از موتورهای جستجو مانند *Google* استفاده از کلمه *AND* ضرورتی ندارد و این موتورها به صورت پیش‌فرض در مورد چندین کلمه مورد جستجو، پیونددهنده *AND* را به کار می‌برند). اگر کاربر به دنبال اطلاعاتی پیرامون دانشگاه‌های موجود در استان تهران یا اراک (منظور شهر اراک) باشد می‌تواند عبارت زیر را به کار برد:

(Province AND Tehran OR Arak) AND Universities

با توجه به اینکه اولویت *AND* از *OR* بیشتر است، در پراکنش اول نیاز به پراکنش دیگری برای جدا کردن استان تهران از یک طرف و اراک از طرف دیگر نیست. البته در موتورهای جستجویی مانند *Google* این عبارت به صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

(Province Tehran OR Arak) Universities

برای حالت دیگر، تصور نمایید کاربر نیاز به اطلاعاتی در مورد دانشگاه‌های تهران دارد و در این جستجو شهر تهران مدنظر است، نه استان تهران. بنابراین عبارت مورد جستجو می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

(Tehran AND Universities) NOT Province

دقت نمایید در موتور جستجوی *Google* عمل *NOT* با علامت *"_"* نشان داده می‌شود. بنابراین عبارت:

Tehran Universities _ Province

به دنبال صفحات وبی خواهد گشت که در آن‌ها کلمات تهران و دانشگاه وجود دارد، اما کلمه استان وجود ندارد.



مثال ۱-۱۰:

جدول درستی گزاره مرکب $p \vee (\neg q \rightarrow r)$ را رسم نمایید.

حل:

مرحله اول: تشخیص تعداد ردیف‌های مورد نظر و مقدار دهی اولی ردیف‌ها:

در این عبارت سه مؤلفه p ، q و r وجود دارد. در نتیجه جدول درستی دارای 2^3 یعنی ۸ ردیف خواهد بود.

ترتیب قرار دادن مقادیر T و F به این ترتیب است که سمت راست ترین متغیر به صورت یک در میان (2^0) ، متغیر بعدی بصورت دو خانه در میان (2^1) و متغیر سوم به صورت ۴ خانه در میان (2^2) مقادیر T و F را به خود خواهند گرفت. اگر ستون دیگری نیز وجود داشت، در آن ستون، ۸ خانه در میان (2^3) مقادیر T و F چیده می‌شود.

مرحله دوم: تشخیص اولویت محاسبات:

با در نظر گرفتن اولویت‌ها در عبارت $p \vee (\neg q \rightarrow r)$ ترتیب محاسبه در جدول درستی به صورت زیر خواهد بود:

- در اولین مرحله عبارت داخل پرانتز می‌بایست ارزیابی شود. برای محاسبه عبارت داخل پرانتز نیز در ابتدا نیاز به ارزیابی $\neg q$ می‌باشد.
- در مرحله بعد ارزیابی عبارت $(\neg q \rightarrow r)$ انجام می‌گیرد.
- در آخر کل عبارت یعنی $p \vee (\neg q \rightarrow r)$ ارزیابی خواهد شد (جدول ۱-۱۲).

جدول ۱-۱۲. جدول درستی گزاره مرکب $p \vee (\neg q \rightarrow r)$

P	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \vee (\neg q \rightarrow r)$
F	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T
T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T
T	T	T	F	T	T

۱-۴- برخی تعاریف پیرامون گزاره‌ها

در این قسمت گزاره همیشه درست، گزاره همیشه نادرست، گزاره‌های هم‌ارز و گزاره‌های خوش تعریف (WFF) را تعریف خواهیم نمود.

📄 **گزاره همیشه درست (راستگو):** گزاره‌ای که صرفنظر از ارزش مؤلفه‌های آن، همیشه ارزش T داشته باشد را گزاره همیشه درست گویند.

📄 **گزاره همیشه نادرست:** گزاره‌ای که صرفنظر از ارزش مؤلفه‌های آن، همیشه ارزش F داشته باشد را گزاره همیشه نادرست گویند.

📄 مثال ۱-۱۱:

گزاره $p \vee \neg p$ یک گزاره همیشه درست است. با توجه به جدول درستی این گزاره، ارزش p هرچه باشد، گزاره $p \vee \neg p$ دارای ارزش درست خواهد بود.

جدول ۱-۱۳.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
F	T	T
T	F	T



📄 مثال ۱-۱۲:

گزاره $p \wedge \neg p$ یک گزاره همیشه نادرست است. جدول درستی این گزاره نشان می‌دهد، ارزش p هرچه باشد، گزاره $p \wedge \neg p$ همیشه دارای ارزش نادرست خواهد بود.

جدول ۱-۱۴.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
F	T	F
T	F	F



📄 **گزاره‌های هم‌ارز:** دو گزاره را هم‌ارز گویند، اگر برای تمام حالت‌های منطقی دارای یک ارزش باشند. گزاره‌های هم‌ارز با علامت $\Leftrightarrow$ و یا $\equiv$ نشان داده می‌شود.

نکته:

اگر نقیص دو فرمول گزاره‌ای هم‌ارز باشند، خود دو فرمول نیز هم‌ارز هستند.

📄 **مثال ۱-۱۳:**

با توجه به جدول ۱-۸، گزاره‌های $p \rightarrow q$ و $\neg q \rightarrow \neg p$ هم‌ارز هستند.

📄 **مثال ۱-۱۴:**

نشان دهید که هم‌ارزی‌های زیر برقرار هستند:

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \quad (\text{الف})$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \quad (\text{ب})$$

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \leftrightarrow \neg q) \equiv (\neg p \leftrightarrow q) \quad (\text{ج})$$

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q \quad (\text{د})$$

حل:

هم‌ارزی‌ها در جداول ۱-۱۵ نشان داده شده است.

جدول ۱-۱۵.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$	p	q	$\neg p$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg p \vee q$
F	F	T	T	T	T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T

(الف)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$
F	F	T	T	T	F	F	F
F	T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	F	F	F

(ج)

p	q	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$
F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	T	F	T	F	F

(د)



نکته:

طبق مثال ۱-۱۴ گزاره شرطی $p \rightarrow q$ با گزاره فصلی $\neg p \vee q$ هم‌ارز هستند. هم‌چنین طبق این مثال برای نقیض کردن یک گزاره دوشروطی کافی است یکی از مؤلفه‌های آن نقیض شود، یعنی: $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \leftrightarrow \neg q) \equiv (\neg p \leftrightarrow q)$

گزاره خوش تعریف: فرمولی (گزاره‌ای) است که اشکال گرامری نداشته باشد. یک فرمول خوش تعریف متشکل از گزاره‌نماها، رابط‌ها و پرانتزها است که بصورت بازگشتی به فرم زیر تعریف می‌شود:

- (۱) هر گزاره‌نما یک فرمول خوش تعریف است.
- (۲) اگر p یک گزاره‌نما باشد آن‌گاه $\neg p$ نیز یک فرمول خوش تعریف است.
- (۳) اگر p و q هر دو فرمول خوش تعریف باشند، آن‌گاه $p \vee q$ ، $p \wedge q$ ، $p \rightarrow q$ و $p \leftrightarrow q$ نیز فرمول خوش تعریف هستند.

مثال ۱-۱۵:

گزاره $p \rightarrow q \wedge (q \wedge r)$ خوش تعریف نیست ولی $p \rightarrow (q \wedge r)$ خوش تعریف است.



۱-۵- خواص گزاره‌ها

دوگان یک گزاره: اگر در یک گزاره همه ترکیب‌های فصلی (عطفی) به عطفی (فصلی) تبدیل شوند و همچنین همه T ها به F ها و برعکس تبدیل شوند، در این صورت دوگان یا همزاد آن گزاره بدست می‌آید. در مورد گزاره‌ها خواصی وجود دارد که این خواص به صورت خلاصه در

جدول زیر دسته‌بندی شده است. در این جدول با توجه به تعریف دوگان گروه اول و گروه دوم دوگان یکدیگر هستند.

جدول ۱-۱۶. خواص گزاره

گروه اول	گروه دوم	خاصیت
$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$	خود توانی
$p \vee F \equiv p$	$p \wedge T \equiv p$	عضو همانی (خنثی)
$p \vee T \equiv T$	$p \wedge F \equiv F$	عضو صفر (غلبه)
$p \vee \neg p \equiv T$	$p \wedge \neg p \equiv F$	عضو مکمل (وارون)
$p \vee q \equiv q \vee p$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	جابجایی
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	شرکت پذیری
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	توزیع پذیری (پخش)
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	جذب
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	دمورگان
$\neg\neg p \equiv p$	_____	نقیض مضاعف

۱-۶- استلزام منطقی

 **استلزام منطقی:** اگر p و q گزاره‌های دلخواه باشند به‌طوری که $p \rightarrow q$ همیشه درست باشد، آن‌گاه گویند که p به طور منطقی مستلزم q است و به صورت $p \Rightarrow q$ نشان‌داده می‌شود.

مثال ۱-۱۶:

فرض کنید، گزاره‌های زیر وجود دارند:

- p : علی مطالعه می‌کند.
 - q : علی تنیس بازی می‌کند.
 - r : علی در امتحان گسسته قبول می‌شود.
- حال گزاره‌های مرکب زیر را در نظر بگیرید:
- اگر علی مطالعه کند، آن‌گاه در امتحان گسسته قبول می‌شود ($p \rightarrow r$).

- اگر علی تنیس بازی نکند، آن‌گاه مطالعه خواهد نمود ($\neg q \rightarrow p$).
 - علی در امتحان گسسته رد شد ($\neg r$).
- آیا فرمول گزاره‌ای $q \rightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge \neg r)$ استلزام منطقی هست؟
برای این منظور جدول درستی این فرمول گزاره‌ای رسم می‌شود:

جدول ۱۷-۱

p	q	r	$p \rightarrow r$	$\neg q \rightarrow p$	$\neg r$	$((p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge \neg r)$	$((p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge \neg r) \rightarrow q$
F	F	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	F	T
T	T	F	F	T	T	F	T
T	T	T	T	T	F	F	T

همانطور که در جدول مشاهده می‌شود، این گزاره شرطی همیشه درست است. بنابراین فرمول گزاره‌ای فوق یک استلزام منطقی است.



مثال ۱۷-۱:

نشان‌دهید گزاره زیر یک استلزام منطقی است.

$$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow r$$

حل:

جدول ۱۸-۱

p	q	r	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow r$
F	F	F	F	T	T	F	T
F	F	T	F	T	T	F	T
F	T	F	T	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T

با توجه به ستون آخر جدول درستی، این گزاره استلزام منطقی است.



۷-۱- استنتاج

 **تعریف استنتاج:** اگر با داشتن گزاره‌های درست $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ، بتوان درستی گزاره q را نتیجه گرفت، گویند استنتاج $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$ معتبر است و در غیر این صورت معتبر نیست. استنتاج فوق به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

گاهی استنتاج به صورت $p_1, p_2, \dots, p_n \vdash q$ نیز نشان داده می‌شود.

۷-۱-۱- قوانین مهم استنتاج

در این قسمت قوانین مهم استنتاج بیان می‌شود. قوانین براساس عملگر مربوطه دسته‌بندی شده‌اند.

• قوانین ترکیبات عطفی:

(۱) ترکیب عطفی	(۲) ساده‌سازی عطفی	(۳) ساده‌سازی عطفی
$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$	$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$	$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore q \end{array}$

• قوانین ترکیبات فصلی:

(۴) ادخال فاصل	(۵) ادخال فاصل	(۶) قیاس فصلی
$\begin{array}{c} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$	$\begin{array}{c} q \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$	$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$

• قوانین ترکیبات شرطی:

(۷) انتزاع	(۸) نقيض انتزاع	(۹) قاعده تناقض	(۱۰) قانون تعدی	(۱۱) اثبات بوسیله حالات
$\frac{p \rightarrow q \quad p}{\therefore q}$	$\frac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\therefore \neg p}$	$\frac{\neg p \rightarrow F}{\therefore p}$	$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{\therefore p \rightarrow r}$	$\frac{p \rightarrow r \quad q \rightarrow r}{\therefore (p \vee q) \rightarrow r}$

✍ مثال ۱-۱۸:

نشان دهید استنتاج‌های زیر برقرار می‌باشند.

(الف)	(ب)	(د)
$\frac{p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad p \wedge q}{\therefore r}$	$\frac{p \rightarrow q \quad r \rightarrow s \quad \neg q \vee \neg s}{\therefore \neg p \vee \neg r}$	$\frac{p \rightarrow q \quad r \rightarrow s \quad p \vee r}{\therefore q \vee s}$

حل:

(الف)	I)	II)	III)	IV)
	$\frac{p \wedge q}{\therefore q}$	$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$	$\frac{p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad p}{\therefore q \rightarrow r}$	$\frac{q \rightarrow r \quad q}{\therefore r}$

(ب)	I)	II)	III)	IV)	V)
	$\frac{\neg q \vee \neg s}{\therefore q \rightarrow \neg s}$	$\frac{r \rightarrow s}{\therefore \neg s \rightarrow \neg r}$	$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow \neg s}{\therefore p \rightarrow \neg s}$	$\frac{p \rightarrow \neg s \quad \neg s \rightarrow \neg r}{\therefore p \rightarrow \neg r}$	$\frac{p \rightarrow \neg r}{\therefore \neg p \vee \neg r}$

(ج)

I)	II)	III)	IV)	V)
$r \vee p$	$\neg r \rightarrow p$ $p \rightarrow q$	$r \rightarrow s$	$\neg s \rightarrow \neg r$ $\neg r \rightarrow q$	$\neg s \rightarrow q$
$\frac{}{\therefore \neg r \rightarrow p}$	$\frac{}{\therefore \neg r \rightarrow q}$	$\frac{}{\therefore \neg s \rightarrow \neg r}$	$\frac{}{\therefore \neg s \rightarrow q}$	$\frac{}{\therefore s \vee q}$

مثال ۱-۱۹:

گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

- اگر محمد خوب درس بخواند، ساختمان گسسته را پاس خواهد نمود.
- محمد درس ریاضی مهندسی را پاس ننموده است.
- اگر محمد ساختمان گسسته را پاس نماید، می‌تواند در ترم آینده سیستم عامل را اخذ نماید.
- محمد ساختمان گسسته را پاس ننموده است.

حال سوال اینجاست که آیا می‌توان گزاره‌های زیر را استنتاج نمود (یعنی می‌توان

در مورد درستی گزاره‌های زیر نتیجه‌گیری نمود)؟

- الف) محمد خوب درس خوانده است.
- ب) محمد در ترم آینده سیستم عامل را اخذ خواهد نمود.

حل:

با نامگذاری گزاره‌ها خواهیم داشت:

p : محمد خوب درس بخواند.

q : محمد درس ساختمان گسسته را پاس نماید.

r : محمد ریاضی مهندسی را پاس نماید.

s : محمد ترم آینده سیستم عامل را اخذ نماید.

با این نامگذاری گزاره‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \\ q \rightarrow s \\ \neg q \end{array}$$

برای بررسی اعتبار استنتاج داریم:

(الف)

I)

$$p \rightarrow q$$

$$\frac{}{\therefore \neg q \rightarrow \neg p}$$

II)

$$\neg q \rightarrow \neg p$$

$$\neg q$$

$$\frac{}{\therefore \neg p}$$

بنابراین استنتاج معتبر نیست.

(ب)

I)

$$q \rightarrow s$$

$$\neg q$$

$$\frac{}{\therefore}$$

توجه نمایید که ارزش گزاره q نادرست و ارزش $q \rightarrow s$ درست است. با این بیان، نمی‌توان در مورد درست بودن یا نبودن گزاره s نتیجه‌گیری نمود. در نتیجه در مورد اعتبار استنتاج نمی‌توان نظر داد.



مثال ۱-۲۰:

آیا استنتاج زیر معتبر است؟

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$\neg q \rightarrow \neg p$$

$$p$$

$$\frac{}{\therefore r}$$

حل:

I)

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$p$$

$$\frac{}{\therefore q \rightarrow r}$$

II)

$$q \rightarrow r$$

$$q$$

$$\frac{}{r}$$

استنتاج معتبر است.



مثال ۱-۲۱:

آیا استنتاج زیر معتبر است؟

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ p \rightarrow (q \vee \neg r) \\ \neg q \vee \neg s \\ p \\ \hline \therefore s \end{array}$$

حل:

I)	II)	III)	IV)
$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \vee \neg r) \\ p \\ \hline \therefore q \vee \neg r \end{array}$	$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ p \\ \hline \therefore r \end{array}$	$\begin{array}{l} q \vee \neg r \\ r \\ \hline \therefore q \end{array}$	$\begin{array}{l} \neg q \vee \neg s \\ q \\ \hline \therefore \neg s \end{array}$

استنتاج معتبر نیست.



۱-۸- روش‌های دیگر اثبات

هدف از اثبات یک قضیه این است که با استفاده از اصول، تعاریف و قضایای مقدماتی مطرح شده به انضمام نتایج آنها، درستی آن قضیه را بیان نمائیم. اکثر قضایای مقدماتی به صورت یک گزاره همیشه درست بیان می‌شوند. یکی از شیوه‌های مرسوم برای اثبات قضیه، استنتاج است که در بخش قبل بیان شد. در این قسمت برخی شیوه‌های متداول دیگر معرفی می‌شوند.

۱-۸-۱- روش غیرمستقیم

پایه و اساس این شیوه بر این استوار است که هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است. یعنی $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$. در بعضی قضایا، اثبات عکس نقیض از اثبات قضیه اصلی راحت‌تر است؛ بنابراین از این روش برای اثبات آن استفاده می‌شود.

مثال ۱-۲۲:

فرض کنید n یک عدد صحیح است. نشان دهید اگر n^2 فرد باشد آن‌گاه n نیز فرد است.

حل:

گزاره‌های p و q به صورت زیر فرض می‌شوند:

• $n^2:p$ فرد است.

• $n:q$ فرد است.

می‌خواهیم بررسی نماییم آیا $p \rightarrow q$ درست است؟ کافی است نشان دهیم $\neg q \rightarrow \neg p$ همواره درست است. فرض کنید n فرد نباشد، بنابراین n زوج است، پس عدد صحیح k موجود است که $n=2k$ و داریم: $(2k)^2 = 2(2k^2)$. پس n^2 زوج است. بنابراین چون عکس نقیض این شرط برقرار است، خود آن نیز برقرار است.



۱-۸-۲- برهان خلف

این روش، یکی از روش‌های مهم اثبات است. در این روش درستی فرض‌ها تغییر نمی‌کند، بلکه فرض می‌کنیم تالی نادرست باشد و آنرا به عنوان یک فرض جدید به فرض‌های قبلی مسأله اضافه می‌کنیم. کافی است نشان دهیم با فرض‌های جدید، فرمول گزاره‌ای همواره نادرست است.

مثال ۱-۲۳:

با استفاده از برهان خلف نشان دهید، اگر ۲۲ روز در نظر گرفته شود، حداقل ۴ روز از آنها در یک روز هفته خواهند بود.

حل:

گزاره p را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

p : حداقل ۴ روز از ۲۲ روز انتخابی در یک روز هفته خواهند بود.

فرض کنید $\neg p$ درست باشد، یعنی حداکثر ۳ روز از ۲۲ روز انتخابی در یک روز هفته باشند.

از آنجا که در هفته ۷ روز وجود دارد، در نتیجه با انتخاب ۲۱ روز، حداکثر ۳ روز در یک روز هفته قرار خواهند گرفت. این مخالف فرض اولیه است. یعنی اگر r ، انتخاب ۲۲ روز در نظر گرفته شود، ما نشان داده‌ایم که $(r \wedge \neg p) \rightarrow \neg p$ درست است، یعنی در ۲۲ روز، حداقل ۴ روز در یک روز هفته خواهند بود.



۱-۸-۳- استقرای ریاضی

یکی دیگر از روش‌های اثبات، استفاده از استقرای ریاضی است. گزاره‌هایی مانند "برای هر عدد طبیعی n ، مجموع اولین n عدد فرد برابر n^2 است"، گزاره‌هایی هستند که در آن جهان مورد بحث اعداد طبیعی است. اصل استقرای ریاضی، قاعده‌ای در اختیار می‌دهد که می‌توان عباراتی نظیر عبارت بالا را اثبات نمود.

✓ **قضیه ۱-۱:** اصل استقرای ریاضی: فرض کنید $S(n)$ یک گزاره ریاضی باشد که در آن n یک عدد صحیح مثبت را نشان می‌دهد که یک یا چندبار ظاهر شده باشد. الف) اگر $S(1)$ درست باشد و ب) اگر (به ازای k خاص ولی دلخواه از $\mathbb{Z}^+$) $S(k)$ درست باشد، آن‌گاه $S(k+1)$ نیز درست باشد، آن‌گاه $S(n)$ به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ درست است. اثبات در منبع [۴]، قضیه ۱-۴ بیان شده است.

■

✍ **مثال ۱-۲۴:**

به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ ثابت کنید: $\sum_{i=1}^n i = 1+2+\dots+n = n(n+1)/2$

حل:

به ازای $n=1$ ، گزاره فوق تبدیل به $1 = 1(1+1)/2 = 1$ می‌شود. در نتیجه $S(1)$ درست است.

فرض کنیم نتیجه بالا برای $n=k$ برقرار باشد، می‌خواهیم نشان‌دهیم $S(k+1)$ نیز برقرار است. یعنی باید اثبات شود:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i &= 1+2+\dots+k+(k+1) = \sum_{i=1}^k i + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

یعنی $S(k+1)$ نیز برقرار است، در نتیجه $S(n)$ به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ درست است.

►

مثال ۱-۲۵:

هنگام بررسی کیفیت برنامه کامپیوتری، یکی از نخستین مسائل این است که آیا این برنامه کاربردی به درستی فعالیت مورد انتظار را انجام می‌دهد یا خیر؟ یکی از روش‌هایی که می‌تواند در اینگونه بررسی‌ها نقشی اساسی بازی کند، استقرای ریاضی است. فرض کنید، قطعه برنامه پاسکال زیر موجود باشد:

```
while n <= 0 do
```

```
begin
```

```
  x := x * y;
```

```
  n := n - 1;
```

```
end;
```

```
answer := x;
```

این برنامه، جواب xy^n را برای متغیرهای حقیقی x و y که در آن n عدد صحیح نامنفی است را تولید می‌کند (مقادیر سه متغیر x و y و n به وسیله کاربر مشخص شده است). درستی این جواب را با استفاده از استقرا تحقیق نمایید.

حل:

به ازای $n=0$ ، شرط حلقه برآورده نمی‌شود، در نتیجه دستورات داخل حلقه اجرا نمی‌شود و فقط x به $answer$ نسبت داده می‌شود که در حقیقت $answer = x = xy^0$ خواهد بود. در نتیجه $S(0)$ درست است.

حال، فرض کنیم $S(k)$ به ازای عدد صحیح نامنفی $k < n$ درست باشد، یعنی $answer = xy^k$ در مورد $S(k+1)$:

$$(k+1) \text{ مقدار } x \text{ در مرحله } = \underbrace{(xy^k)}_{\text{مقدار } x \text{ در مرحله } k \text{ ام}} \times y = xy^{(k+1)}$$



✓ **قضیه ۱-۲:** اصل استقرای متناهی (استقرای قوی): فرض کنید $S(n)$ یک گزاره ریاضی باشد که حاوی یک یا چندبار حضور متغیر صحیح و مثبت n است؛ همچنین فرض کنید $n, n_1 \in \mathbb{Z}^+$ و $n, n_1 \leq n$.

الف) اگر $S(n)$ ، $S(n+1)$ ، $S(n+2)$ ، ...، $S(n_1-1)$ و $S(n_1)$ درست باشد و

ب) اگر به ازای k خاص ولی دلخواه از $\mathbb{Z}^+$ و $k \geq n_1$ وقتی $S(n_1)$ ، $S(n_1+1)$ ، $S(n_1+2)$ ، ...، $S(k-1)$ و $S(k)$ درست باشند، آن گاه $S(k+1)$ نیز درست باشد،
 آن گاه $S(n)$ به ازای هر $n \geq n_1$ درست است.
 اثبات در منبع [۴]، قضیه ۲-۴ بیان شده است.

■

مثال ۱-۲۶:

یک ویروس کامپیوتری پس از گذشت n ساعت، تعداد p_n کامپیوتر را آلوده نموده است. اگر $p_0 = 3$ و $p_1 = 7$ و به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داشته باشیم: $p_n = 3p_{n-1} - 2p_{n-2}$ با استفاده از استقرای ریاضی قوی نشان دهید که $p_n = 2^{n+2} - 1$.

حل:

$$S(0): p_0 = 2^{0+2} - 1 = 3$$

$$S(1): p_1 = 2^{1+2} - 1 = 7$$

این دو درست هستند. با این فرض که به ازای عددی مانند $k \in \mathbb{Z}^+$ که در آن $k \geq 1$ است، گزاره‌های $S(0)$ ، $S(1)$ ، ...، $S(k-1)$ و $S(k)$ درست هستند، حالت $n = k+1 \geq 2$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= 3p_k - 2p_{k-1} \\ &= 3(2^{k+2} - 1) - 2(2^{(k-1)+2} - 1) \\ &= 3 \times 2^{k+2} - 3 - 2^{(k-1)+2} + 2 \\ &= 3 \times 2^{k+2} - 2^{k+2} - 1 \\ &= 2(2^{k+2}) - 1 = 2^{(k+1)+2} - 1 \end{aligned}$$

در نتیجه، بنابراین استقرای قوی، $S(n)$ به ازای هر $n \geq 0$ درست است.

►

۹-۱- سورها

در بخش‌های قبل گزاره‌نما تعریف شد و بیان شد که یک گزاره‌نما با جایگزینی مقادیر برای متغیرها تبدیل به گزاره می‌شود. در این قسمت به معرفی سورها خواهیم پرداخت.

 **عالم سخن:** مقادیر مجازی که متغیرهای یک گزاره‌نما می‌توانند اخذ نماید را عالم سخن گویند.

 مثال ۱-۲۷:

- در گزاره‌نمای " x عددی اول است" می‌توان عالم سخن را اعداد طبیعی در نظر گرفت.
- در گزاره‌نمای " x قابلیت اجرای برنامه‌های گرافیکی قوی را دارد" عالم سخن می‌تواند کامپیوترها در نظر گرفته شود.
- در گزاره‌نمای " x فانی است" عالم سخن می‌تواند مجموعه انسان‌ها باشد.



 **مجموعه جواب:** زیرمجموعه‌ای از عالم سخن که گزاره‌نما را تبدیل به گزاره با ارزش درست می‌نماید، مجموعه جواب نامیده می‌شود.

 مثال ۱-۲۸:

- در گزاره‌نمای " x عددی اول است" مجموعه جواب اعداد $2, 3, 5, 7, \dots$ می‌باشد.
- در گزاره‌نمای " x قابلیت اجرای برنامه‌های گرافیکی قوی را دارد" مجموعه جواب کامپیوترهایی با کارت گرافیکی قوی مانند $Gforce\ 250$ و $Ati\ 6$ می‌باشد.
- در گزاره‌نمای " x فانی است" مجموعه جواب، همه انسان‌ها می‌باشد.



 **گزاره‌نمای دو متغیره:** فرض کنید $p(x, y)$ یک جمله شامل دو متغیر x و y باشد و این دو متغیر متعلق به عالم سخن باشند، اگر با قرار دادن دو مقدار از عالم سخن به جای x و y ، جمله $p(x, y)$ تبدیل به گزاره شود، آن‌گاه $p(x, y)$ را گزاره‌نمای دو متغیره نامند.

مثال ۱-۲۹:

گزاره‌نماهای زیر در نظر بگیرید:

- $p(x)$: عددی اول است (عالم سخن اعداد طبیعی).
 - $q(x,y)$: $x+2y$ عدد زوج است (عالم سخن اعداد صحیح).
- در این گزاره‌نماها با جایگذاری مقادیری برای متغیرها خواهیم داشت:
- $p(5)$: عددی اول است. (با ارزش درست)
- $\neg p(7)$: عددی اول نیست. (با ارزش نادرست)
- $q(2,3)$: $8=3 \times 2 + 2$ عدد زوج است. (با ارزش درست)
- $\neg q(1,1)$: $3=1 \times 2 + 1$ عدد زوج نیست. (با ارزش درست)

در هر دو مورد $p(x)$ و $q(x,y)$ ، برخی از جایگذاری‌های به گزاره‌های درست و برخی دیگر به نادرست منجر می‌شوند. بنابراین می‌توان گزاره‌های درست زیر را ساخت:

(۱) به‌ازای x ای، $p(x)$.

(۲) به‌ازای x و y ای، $q(x,y)$.

سور وجودی: در گزارهٔ ۱ عبارت "به‌ازای x ای" به‌کار رفته است، که می‌توان آن را به صورت "به‌ازای حداقل یک x " یا " x ای وجود دارد به‌طوری‌که" نیز بیان کرد. به این دسته از عبارت‌ها سور وجودی گویند. در قالب نماد، گزارهٔ ۱ به صورت $\exists x p(x)$ نوشته می‌شود.

سور عمومی: سور عمومی با $\forall x$ نشان داده می‌شود و به صورت "به‌ازای همهٔ x ها" یا "به‌ازای هر x " بیان می‌شود.

سور صفر: سور صفر با $\nexists x$ نشان داده می‌شود و به صورت "به‌ازای هیچ مقدار x " بیان می‌شود.

مثال ۱-۳۰:

گزاره‌نماهای زیر را در عالم سخن مجموعهٔ اعداد حقیقی (R) در نظر بگیرید:

$p(x): x \geq 0$

$$q(x): x^2 \geq 0$$

$$r(x): x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$s(x): x^2 - 3 > 0$$

آن‌گاه گزاره‌های زیر درست هستند:

- $\forall x q(x)$: زیرا به ازای هر عدد حقیقی، مربع آن همواره مثبت است.
- $\exists x [p(x) \wedge r(x)]$: کافی است عدد حقیقی وجود داشته باشد که به ازای آن گزاره-های p و r درست باشند. به عنوان مثال هر دو گزاره به ازای $x=4$ درست هستند.
- $\forall x r(x)$: این گزاره به ازای تمام اعداد حقیقی درست نیست. به عنوان نمونه $r(0)$ نادرست است، اما $r(-1)$ و $r(4)$ درست هستند. بنابراین ارزش این گزاره نادرست است.
- $\forall x p(x) \rightarrow s(x)$: این گزاره به ازای تمام اعداد حقیقی درست نیست. به عنوان نمونه $p(1)$ درست و $s(1)$ نادرست است؛ و در گزاره شرطی مقدم درست و تالی نادرست ارزش کل گزاره را نادرست خواهد نمود.



۱-۹-۱- ترکیب سورها

گاهی در یک گزاره‌نما ممکن است بیش از یک سور به کار رود. جملات زیر را در نظر بگیرید:

- برای هر x و برای هر y داریم: $x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{R}$)
- برای هر x وجود دارد y به‌طوری‌که: $x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{Z}$)
- یک x وجود دارد به‌طوری‌که برای هر y داریم: $x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{R}$)
- یک x وجود دارد و یک y وجود دارد به‌طوری‌که: $x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{Z}$)

جملات فوق با استفاده از سورها به صورت زیر نوشته می‌شوند:

- $\forall x, \forall y \ x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{R}$)
- $\forall x, \exists y \ x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{Z}$)
- $\exists x, \forall y \ x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{R}$)
- $\exists x, \exists y \ x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{Z}$)

نکته:

ارزش سور عمومی هنگامی درست است که مجموعه جواب تمامی مجموعه عالم سخن باشد. در سور وجودی وقتی مجموعه جواب تهی نباشد، ارزش سور درست خواهد بود. سور صفر نیز هنگامی ارزش درست دارد که مجموعه جواب تهی باشد.

مثال ۱-۳۱:

ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) $\forall x, \forall y \ x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{R}$)

(ب) $\forall x, \exists y \ x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{Z}$)

(ج) $\exists x, \forall y \ x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{R}$)

(د) $\exists x, \exists y \ x+y=0$ (عالم سخن $\mathbb{Z}$)

حل:

گزاره‌های (الف) و (ج) دارای ارزش نادرست و سورهای (ب) و (د) ارزش درست دارند.

**نکته:**

سورها خاصیت جابجایی ندارند. به عنوان مثال، فرض کنید $P(x,y)$ گزاره‌نمایی مشتمل بر دو متغیر x و y باشد.

- عبارت $\forall x \exists y: p(x,y)$ اینگونه خوانده می‌شود: "به ازاء تمام x ها، عدد y ای وجود دارد که رابطه $p(x,y)$ برقرار است".
- عبارت $\exists y \forall x: p(x,y)$ به این معنی است که: "یک عدد y برای تمام مقادیر x وجود دارد که رابطه $p(x,y)$ برقرار است".

ملاحظه می‌شود که این دو عبارت دارای دو مفهوم کاملاً متفاوت می‌باشند به-طوری که در عبارت دوم y مستقل از مقادیر x است، در حالیکه در عبارت اول، مقدار y کاملاً وابسته به x انتخاب می‌شود.

نکته:

پرانتر، کروسه، آکولادها در حوزه تعریف سورها می‌باشند.

مثال ۱-۳۲:

عبارات مقابل چگونه خوانده می‌شوند؟

$$\forall x \exists y [p(x,y) \rightarrow q(x,y) \wedge r(y)]$$

$$\forall x [\forall y \neg p(x,y) \rightarrow r(x)]$$

حل:

$\forall x \exists y [p(x,y) \rightarrow q(x,y) \wedge r(y)]$: برای هر x وجود دارد y ای که اگر خاصیت $p(x,y)$ برقرار باشد، آن‌گاه خواص $q(x,y)$ و $r(y)$ هر دو برقرار خواهند بود.
 $\forall x [\forall y \neg p(x,y) \rightarrow r(x)]$: اگر $p(x,y)$ برقرار نباشد، آن‌گاه $r(y)$ برقرار است. در اینجا بدون وجود هیچ ابهامی می‌توان سورها را حذف نماییم.



مثال ۱-۳۳:

در قطعه برنامه به زبان C زیر، n متغیری صحیح و متغیر A آرایه‌ای از ۲۰ مقدار صحیح باشد، به‌طوریکه:

for ($n=0$; $n<20$; $n++$)

$A[n]=n \times n-n$;

گزاره‌های زیر دربارهٔ آرایهٔ A را می‌توان به‌صورت زبان گزاره‌ها بیان کرد.
 الف) هر درایهٔ این آرایه نامنفی است:

$$\forall n \quad A[n] \geq 0$$

ب) عدد صحیح $A[19]$ بزرگ‌ترین درایهٔ این آرایه است:

$$\forall n \quad [(0 \leq n \leq 19) \rightarrow (A[n] < A[19])]$$

ج) دو درایهٔ متوالی در A وجود دارند به‌طوری‌که درایهٔ بزرگ‌تر دو برابر درایهٔ کوچک‌تر است:

$$\exists n \quad A[n+1] = 2A[n]$$

د) درایه‌های این آرایه به‌طور اکیداً صعودی مرتب شده‌اند:

$$\forall n \quad [(0 \leq n \leq 19) \rightarrow (A[n] < A[n+1])]$$

ه) درایه‌های این آرایه متمایزند:

$$\forall m \quad \forall n \quad [(m \neq n) \rightarrow (A[m] \neq A[n])]$$



۱-۹-۲- نقیض سور

گزاره دارای سور را نیز می‌توان مانند گزاره معمولی نقیض نمود. روابط بین گزاره‌های سوردار و نقیض آنها در جدول ۱-۱۹ نشان داده شده است.

جدول ۱-۱۹. ارتباط گزاره‌های سوردار و نقیض آنها

گزاره سوردار	چه وقت درست است؟	چه وقت نادرست است؟	نقیض گزاره
$\exists x p(x)$	به ازای حداقل یک مقدار مجاز $p(x)$ برقرار باشد.	به ازاء هر مقدار مجاز $p(x)$ برقرار نباشد.	$\neg \forall x p(x)$
$\forall x p(x)$	به ازای هر مقدار مجاز، $p(x)$ برقرار باشد.	به ازاء حداقل یک مقدار مجاز $p(x)$ برقرار نباشد.	$\exists x \neg p(x)$
$\nexists x p(x)$	مقدار مجازی وجود ندارد که $p(x)$ برقرار باشد.	مقدار مجازی وجود دارد که $p(x)$ برقرار باشد.	$\exists x p(x)$

به عنوان مثال، گزاره سوردار "هر دانشجوی کلاس، درس ریاضی را پاس نموده است." را در نظر بگیرید. اگر $p(x)$ گزاره " x درس ریاضی را پاس نموده است" باشد، آن‌گاه $\forall x p(x)$.

نقیض این گزاره به صورت "این طور نیست که هر دانشجوی کلاس، درس ریاضی را پاس نموده باشد" است. یعنی دانشجویی در این کلاس وجود دارد که درس ریاضی را پاس ننموده باشد: $\exists x \neg p(x)$. بنابراین: $\neg \forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$

مثال ۱-۳۴:

نقیض گزاره سوردار زیر را بدست آورید.

$$\begin{aligned} \neg (\forall x \exists y \quad x+y=4 \rightarrow x>3) &\equiv \exists x \neg (\exists y \quad x+y=4 \rightarrow x>3) \\ &\equiv \exists x \quad \forall y \neg (x+y=4 \rightarrow x>3) \\ &\equiv \exists x \quad \forall y (x+y=4 \wedge x \leq 3) \end{aligned}$$



۱-۹-۳- اثبات درستی گزاره‌های سوردار

اکثر قضیه‌های ریاضی به صورت گزاره‌های سوردار می‌باشند. به عنوان مثال "برای هر عدد طبیعی n ، مجموع اولین n عدد فرد برابر است با n^2 ". بنابراین همانطور که برای اثبات درستی یک گزاره بدون سور از قواعد استنتاج استفاده می‌شود، برای گزاره‌های سوردار نیز این قواعد معتبر است.

چهار قانون مهم استنتاج وجود دارد که با استفاده از آنها و شرایط خاص می‌توان از گزاره‌های سوردار به گزاره‌های بدون سور و برعکس رسید. این چهار قانون در جدول ۱-۲۰ نشان داده شده‌اند. در این جدول فرض کنید x یک متغیر دلخواه، c یک مقدار ثابت متعلق به عالم سخن و $p(x)$ یک گزاره‌نما باشد.

جدول ۱-۲۰. قوانین استنتاج گزاره‌های سوردار

$\frac{\forall x p(x)}{\therefore p(c)}$	هر عضو دلخواه c
$\frac{p(c)}{\therefore \forall x p(x)}$	هر عضو دلخواه c
$\frac{\exists x p(x)}{\therefore p(c)}$	برای یک عنصر c
$\frac{p(c)}{\therefore \exists x p(x)}$	برای یک عنصر c

مثال ۱-۳۵:

فرض کنید گزاره‌های $f(x)$ ، $g(x)$ ، $p(x)$ به صورت زیر تعریف شده باشند:

- $f(x)$: x پرنده است.
- $g(x)$: x گنجشک است.
- $p(x)$: x پر دارد.

آیا از گزاره‌های "تمام پرندگان پر دارند" و "تمام گنجشکان پرنده هستند"، گزاره "تمام گنجشکان پر دارند" استنتاج می‌شود؟

حل:

صورت سؤال به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$(۱): \forall x [f(x) \rightarrow p(x)]$$

$$(۲): \forall x [g(x) \rightarrow f(x)]$$

$$\therefore \forall x [g(x) \rightarrow p(x)]$$

با توجه به قوانین استنتاج برای هر c دلخواه داریم: $f(c) \rightarrow p(c)$ و $g(c) \rightarrow f(c)$
و از قانون تعدی $g(c) \rightarrow p(c)$ را برای هر c دلخواه نتیجه می‌گیریم:
 $\forall x [g(x) \rightarrow p(x)]$



چند نمونه مسأله حل شده

۱. فرض کنید p, q, r, s گزاره‌های زیر را نشان می‌دهند:

- p : نوشتن برنامه کامپیوتری را قبل از ناهار به پایان می‌رسانم.
- q : بعداز ظهر تنیس بازی می‌کنم.
- r : خورشید می‌درخشد.
- s : رطوبت پایین است.

گزاره‌های زیر را در قالب نماد بنویسید:

- الف- اگر خورشید بدرخشد، امروز بعداز ظهر تنیس بازی خواهیم کرد.
 ب- به پایان رسیدن برنامه کامپیوتری من قبل از ناهار، برای تنیس بازی کردن امروز بعد از ظهر لازم است.
 ج- کافی است رطوبت پایین باشد و آفتاب بدرخشد تا امروز بعداز ظهر تنیس بازی کنم.

حل:

الف - $r \rightarrow q$

ب - $q \rightarrow p$

ج - $s \wedge r \rightarrow q$



۲. جملات زیر را به صورت گزاره بنویسید:

- الف) این کتاب جالب است اما تمرین‌هایش مشکل است.
 ب) این کتاب جالب است، اما موضوعات آن مشکل است.
 ج) این کتاب جالب نیست، تمرین‌ها مشکل است اما موضوعات آن مشکل نیست.
 د) اگر این کتاب جالب است و تمرین‌های آن مشکل نیست، پس موضوع آن مشکل نیست.
 ه) اینکه کتاب جالب است به این معنی است که موضوع کتاب مشکل نیست و برعکس.
 و) موضوع کتاب مشکل نیست، اما این کتاب جالب است و تمرین‌های آن مشکل است.
 ز) موضوع کتاب مشکل نیست، اما تمرین‌های آن مشکل است.

ح) یا این کتاب جالب است یا اینکه موضوع آن مشکل است.

حل:

ابتدا گزاره‌ها نامگذاری می‌شوند:

p : کتاب جالب است.

q : تمرین‌های کتاب مشکل است.

r : موضوع کتاب مشکل است.

الف) $p \wedge q$ ب) $p \wedge r$ ج) $\neg p \wedge q \wedge \neg r$ د) $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$
 ه) $p \leftrightarrow \neg r$ و) $\neg r \wedge p \wedge q$ ز) $\neg r \wedge q$ ح) $p \oplus r$



۳. در گزاره‌های زیر تشخیص دهید: کلمه "یا" به کار گرفته شده، ترکیب فصلی را نشان-می‌دهد یا نشان‌دهنده XOR است؟

الف) به همراه غذا قهوه یا چای سرو می‌شود.

ب) رمز عبور می‌تواند یک عدد با حداقل ۳ رقم باشد، یا اینکه یک کلمه با حداقل ۸ کاراکتر باشد (کاراکتر، هر علامت قابل نمایش در کامپیوتر است).

ج) برای خرید می‌توانید از پول نقد یا چک پول استفاده نمایید.

د) برای استخدام تجربه برنامه نویسی به زبان ++C یا Java مورد نیاز است.

ه) برای اخذ درس ساختمان گسسته، باید درس ریاضی ۱ یا یکی از دروس کامپیوتر را پاس کرده باشید.

حل:

الف) XOR است. زیرا یکی از این دو سرو می‌شود.

ب) ترکیب فصلی است. زیرا کلمه ۸ حرفی می‌تواند شامل عدد هم باشد.

ج) ترکیب فصلی است، زیرا خریدار ممکن است ترکیبی از این دو را نیز استفاده نماید.

د) ترکیب فصلی است، زیرا ممکن است یک متقاضی هر دو مهارت را نیز داشته باشد.

ه) ترکیب فصلی است. زیرا ممکن است دانشجوی هم درس ریاضی ۱ و هم یک درس کامپیوتر را پاس کرده باشد.



۴. گزاره $p(n)$ به ازای تمام اعداد صحیح به صورت زیر تعریف می‌شود:

- $p(0)$ درست است.
 - اگر $p(n)$ درست باشد، آن‌گاه $p(2n)$ درست است.
 - اگر $p(n)$ درست باشد، آن‌گاه $p(n-4)$ درست است.
- درستی گزاره‌های زیر را بررسی نمایید.
- الف) $p(n)$ به ازای تمام اعداد مثبت زوج درست است.
- ب) اگر $p(2)$ درست باشد، آن‌گاه $p(n)$ برای تمام اعداد مثبت زوج درست است.
- ج) $p(n)$ به ازای تمام اعداد منفی زوج درست است.
- د) اگر $p(10)$ درست باشد، آن‌گاه $p(n)$ برای تمام اعداد منفی زوج درست است.

حل:

- الف) با فرض اینکه $p(0)$ درست باشد، آن‌گاه گزاره‌های $p(-4), p(-8), p(-12), \dots$ صحیح خواهند بود، ولی نمی‌توان نتیجه گرفت که این گزاره، به ازای تمام اعداد مثبت درست است.
- ب) اگر $p(2)$ درست باشد، $p(4), p(8), p(16), \dots$ درست خواهند بود. گزاره‌هایی مانند $p(6)$ و $p(10)$ وضعیت مشخصی ندارند. بنابراین نمی‌توان نتیجه گرفت که این گزاره به ازای تمامی اعداد مثبت زوج درست خواهد بود.
- ج) با فرض درست بودن $p(0)$ ، گزاره‌های $p(-4), p(-8), p(-12), \dots$ درست خواهند بود؛ و این شامل تمام اعداد منفی زوج نمی‌شود. بنابراین این گزاره نیز درست نمی‌باشد.
- د) با فرض درست بودن $p(0)$ گزاره‌های زیر درست خواهند بود:
- $p(-4), p(-8), p(-12), p(-16), \dots$
- و با فرض درست بودن $p(10)$ گزاره‌های زیر درست خواهند بود:
- $p(6), p(2), p(-2), p(-6), p(-10), \dots$
- بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که با درست بودن گزاره $p(10)$ ، گزاره برای تمامی اعداد منفی زوج درست خواهد بود.



۵. عکس نقیض هریک از گزاره‌های زیر را به دست آورید.
- الف) اگر x کوچک‌تر از صفر باشد، آن‌گاه x مثبت نیست.
- ب) تنها اگر خسته نباشد، موفق می‌شود.

ج) برای مستطیل بودن، لازم است شکل مربع باشد.

حل:

الف) عکس نقیض $p \rightarrow \neg q$ گزاره $q \rightarrow \neg p$ است. از این رو عکس نقیض گزاره داده شده به صورت "اگر x مثبت باشد، آن گاه x کوچک تر از صفر نیست" می باشد.

ب) اگر او خسته نباشد، آن گاه موفق نمی شود.

ج) اگر شکل مستطیل نباشد، آن گاه مربع نیست.



۶. تحقیق کنید که گزاره $p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee r))$ یک گزاره همیشه درست است.

حل:

p	q	r	$p \vee r$	$q \rightarrow (p \vee r)$	$p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee r))$
F	F	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	T	T



۷. فرض کنید p, q, r گزاره های دلخواه باشند؛ هم ارزی های زیر را نشان دهید:

الف) $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

ب) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$

حل:

الف) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$
 $\equiv \neg p \vee (q \wedge r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$

ب) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$
 $\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r$
 $\equiv \neg(p \vee q) \vee r$
 $\equiv (p \vee q) \rightarrow r$



۸. فرمول گزاره ای زیر را در نظر بگیرید:

$$[(p \vee T) \wedge (q \vee F)] \vee (r \wedge s \wedge T)$$

الف) دوگان این فرمول را بیابید.

ب) این فرمول را تا حد ممکن ساده کنید و به صورت گزاره شرطی بنویسید.

حل:

الف) دوگان فرمول به صورت $[(p \wedge F) \vee (q \wedge T)] \wedge (r \vee s \vee F)$ است.

ب) برای ساده نمودن فرمول داریم:

$$\begin{aligned} [(p \vee T) \wedge (q \vee F)] \vee (r \wedge s \wedge T) &\equiv \\ &\equiv q \vee (r \wedge s) \\ &\equiv q \vee \neg(\neg r \vee \neg s) \\ &\equiv q \vee \neg(r \rightarrow \neg s) \\ &\equiv \neg(r \rightarrow \neg s) \vee q \\ &\equiv (r \rightarrow \neg s) \rightarrow q \end{aligned}$$



۹. درستی استنتاج زیر را ثابت کنید.

$$[p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \rightarrow \neg q)] \rightarrow (s \vee t)$$

حل:

I)	II)	III)	IV)	V)	VI)
$p \rightarrow q$	$r \rightarrow \neg q$	$q \rightarrow \neg r$	$s \vee r \equiv \neg s \rightarrow r$	$\neg s \rightarrow r$	s
p	$\underline{\hspace{1cm}}$	q	$\underline{\hspace{1cm}}$	$\neg r$	$\underline{\hspace{1cm}}$
$\underline{\hspace{1cm}}$	$\therefore q \rightarrow \neg r$	$\underline{\hspace{1cm}}$	$\underline{\hspace{1cm}}$	$\underline{\hspace{1cm}}$	$\therefore s \vee t$
$\therefore q$		$\therefore \neg r$		$\therefore s$	



۱۰. یک کارآگاه از چهار نفر از شاهدان یک جرم بازجویی نموده است. از مطالبی که

این چهار شاهد عنوان نموده‌اند، کارآگاه به نتایج زیر رسیده است:

اگر شاهد A راست بگوید، شاهد B نیز درست می‌گوید.

هر دو شاهد B و C با هم نمی‌توانند راست بگویند.

هر دو شاهد C و D با هم نمی‌توانند دروغ بگویند.

اگر شاهد D راست بگویند، شاهد B دروغ می‌گوید.

آیا کارآگاه می‌تواند تشخیص دهد که کدام شاهد دروغ و کدام شاهد راست می‌گوید؟

حل:

اگر a, b, c, d به ترتیب نشان‌دهنده درست بودن گفته‌های شاهدان A, B, C, D باشد، داریم:

$$(۱) a \rightarrow b$$

$$(۲) \neg(b \wedge c)$$

$$(۳) \neg(\neg c \wedge \neg d)$$

$$(۴) d \rightarrow \neg b$$

با تبدیل فرمول‌های گزاره‌ای دوم و سوم به عبارتهای شرطی خواهیم داشت:

$$(۱) a \rightarrow b$$

$$(۲) \neg(b \wedge c) \equiv \neg b \vee \neg c \equiv b \rightarrow \neg c$$

$$(۳) \neg(\neg c \wedge \neg d) \equiv c \vee d \equiv \neg c \rightarrow d$$

$$(۴) d \rightarrow \neg b$$

با توجه به گزاره‌های شرطی ۲ و ۳ و ۴:

$$\begin{array}{l} b \rightarrow \neg c \\ \neg c \rightarrow d \\ d \rightarrow \neg b \end{array} \Rightarrow b \rightarrow \neg b \equiv \neg b \vee \neg b \equiv \neg b$$

یعنی شاهد B دروغ می‌گوید.

با توجه به $a \rightarrow b$ و از آنجا که b دارای ارزش نادرست است، برای اینکه ارزش گزاره شرطی درست باشد، باید a نیز نادرست باشد. بنابراین شاهد A نیز دروغ می‌گوید.

با توجه به گزاره $b \rightarrow \neg c$ ، و اینکه b دارای ارزش نادرست است، در مورد درست یا نادرست بودن c نمی‌توان تصمیم گرفت. در گزاره‌های شرطی، عنوان شد که اگر قسمت مقدم نادرست باشد، فارغ از ارزش قسمت تالی، گزاره دارای ارزش درست خواهد داشت. بنابراین نمی‌توان در مورد راست یا دروغ بودن گفته‌های شاهد C نظر داد.

با توجه به گزاره $d \rightarrow \neg b$ ، از آنجا که b نادرست است، $\neg b$ درست خواهد بود، بنابراین d می‌تواند درست یا نادرست باشد. بنابراین نمی‌توان در مورد راست یا دروغ بودن گفته‌های شاهد D نظر داد.



۱۱. یک سایت کامپیوتری توسط عده‌ای هک شده‌است. مسئولان سایت با توجه به آدرس اینترنتی افراد مظنون، به مدارک زیر دست یافته‌اند. با توجه به این اطلاعات در مورد هر کدام از افراد مشخص نمایید که کدام یک سایت را هک نموده‌اند.
- اگر A سایت را هک نموده باشد، B نمی‌تواند هکر این سایت باشد.
 - حداقل یکی از دو نفر B یا D هکر هستند.
 - اگر D سایت را هک نموده باشد، C نمی‌تواند سایت را هک نموده باشد.
 - اگر E سایت را هک نموده باشد، C نیز هکر دیگر سایت خواهد بود.
 - با مدارکی ثابت شده‌است که C یکی از هکرهاي سایت است.

حل:

در ابتدا هر کدام از گزاره‌های زیر را به صورت نماد نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \neg B \\ B &\vee D \\ D &\rightarrow \neg C \\ E &\rightarrow C \\ C \end{aligned}$$

در مورد E :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow C \\ C \end{aligned}$$

$$\overline{\therefore \neg E}$$

در نتیجه E نمی‌تواند هکر باشد.

در مورد D :

$$\begin{aligned} D &\rightarrow \neg C \\ C \end{aligned}$$

$$\overline{\therefore \neg D}$$

یعنی D هکر سایت نیست.

در مورد B :

$$\begin{array}{l} B \vee D \\ \neg D \\ \hline \therefore B \end{array}$$

بنابراین B نیز یکی دیگر از هکرهاى سایت است.

در مورد A :

$$\begin{array}{l} A \rightarrow \neg B \\ B \\ \hline \therefore \neg A \end{array}$$

بنابراین A هکر نیست.



۱۲. ثابت کنید حاصل جمع یک عدد زوج با هر عدد فرد، عددی فرد خواهد بود.

حل:

فرض کنید M عددی زوج و N عددی دلخواه و فرد باشد. بنابراین:

$$\exists i, j \in \mathbb{Z}: M = 2i, N = 2j + 1$$

اثبات مستقیم:

$$M + N = 2i + (2j + 1) = 2(i + j) + 1$$

و حکم ثابت شد.

برهان خلف: فرض کنید $M + N$ فرد نباشد، پس زوج است، بنابراین داریم:

$$\exists k \in \mathbb{Z}: M + N = 2k$$

از طرفی:

$$M = 2k - N = 2k - (2j + 1) = 2(k - j) - 1$$

بنابراین M فرد است، که این متناقض با فرض مسأله است.



۱۳. متن زیر در رابطه با درس ساختمان‌های گسسته (به اختصار گسسته) برای دانشجویی به نام الهام قابل بحث است:
- اگر امتحان گسسته غیراستاندارد باشد یا الهام وقت کافی برای درس نگذاشته باشد، آن‌گاه الهام درس را رد خواهد شد.
 - اگر الهام درس گسسته را رد شود آن‌گاه با استفاده از تبصره ۱۰، درس ساختمان داده و درس مدار منطقی را ترم بعد هم نیاز خواهد کرد.
 - اگر امتحان گسسته غیراستاندارد باشد، آن‌گاه طراح فردی کم تجربه بوده است یا وقت کافی برای طراحی نداشته است.
 - اگر برای طراحی چند هفته به طراح سوال وقت داده شود، آن‌گاه طراح وقت کافی برای طراحی سوال داشته است.
 - اگر الهام کمتر از هفته‌ای ۴ ساعت در طول نیمسال برای درس وقت بگذارد، آن‌گاه وقت کافی برای درس نگذاشته است.
 - الهام کمتر از هفته‌ای ۴ ساعت در طول نیمسال برای درس گسسته وقت گذاشته است.
 - به طراح سوال، چندین هفته برای طرح سوال وقت داده شده است.

موارد زیر را از طریق قواعد استنتاج اثبات یا رد نمایید؟

- الف) آیا الهام برای درس مدار منطقی در نیمسال بعد به تبصره ۱۰ نیاز خواهد داشت؟
 ب) آیا طراح، فردی کم تجربه بوده است؟

حل:

در ابتدا گزاره‌ها را نامگذاری می‌نماییم:

- a: امتحان گسسته غیراستاندارد باشد.
 b: الهام وقت کافی برای درس می‌گذارد.
 c: الهام درس را رد خواهد شد.
 d: الهام از تبصره ۱۰ استفاده خواهد کرد.
 e: طراح کم تجربه بوده است.
 f: طراح وقت کافی برای طراحی دارد.
 g: طراح چند هفته وقت دارد.
 h: الهام کمتر از هفته‌ای ۴ ساعت برای درس وقت می‌گذارد.
 حال داریم:

$$a \vee \neg b \rightarrow c$$

$c \rightarrow d$
 $a \rightarrow e \vee \neg f$
 $g \rightarrow f$
 $h \rightarrow \neg b$
 h
 g

باید بررسی شود که آیا d و e برقرار است یا خیر.
 الف):

I)	II)	III)
$h \rightarrow \neg b$	$a \vee \neg b \rightarrow c$	$c \rightarrow d$
h	$\neg b$	c
$\hline \therefore \neg b$	$\hline \therefore c$	$\hline \therefore d$

بنابراین الهام به تبصره ۱۰ نیاز خواهد داشت.

ب):

با توجه به استنتاج $g \rightarrow f, g \vdash f$ یعنی طراح وقت کافی برای طراحی سوال داشته است. تنها جایی که گزاره e تنها در $a \rightarrow e \vee \neg f$ استفاده شده است. از آنجا که ارزش f درست است، بنابراین $\neg f$ نادرست و در نتیجه $e \vee \neg f \equiv e \vee F \equiv e$ خواهد بود. اما در گزاره شرطی $a \rightarrow e$ مقدار e وابسته به مقدار a است و چون ارزش a مشخص نیست، نمی توان در مورد ارزش e نتیجه گیری نمود. بنابراین نمی توان به این سوال پاسخ داد.



۱۴. با استفاده از برهان خلف نشان دهید که اگر $3n+2$ فرد باشد، آن گاه n نیز فرد است.

حل:

اگر p فرد بودن $3n+2$ و q فرد بودن n باشد، برای استفاده از برهان خلف فرض می کنیم که p و $\neg q$ درست است. یعنی فرض می کنیم $3n+2$ فرد است و n زوج است.

از آنجا که n زوج فرض شده، بنابراین عددی مانند k وجود دارد که $n=2k$. بنابراین:

$$3n+2=3(2k)+2=6k+2=2(3k+1)$$

یعنی $3n+2$ نیز زوج است و این مخالف فرض اولیه است.



۱۵. به ازای $n \geq 4$ ثابت کنید $n! \geq 2^n$ برقرار است.

حل:

از روش استقراء، استفاده می‌نماییم. چون $2^4 = 16 \geq 24 = 4!$ ، در نتیجه به ازای $n=4$ نابرابری بالا درست است.

فرض می‌کنیم $S(n): n! \geq 2^n$ داریم:

$$S(n+1): (n+1)! = n! (n+1) \geq 2^n (n+1)$$

از آنجا که $n \geq 4$ ، در نتیجه $n+1 \geq 5 \geq 2$ ، در نتیجه:

$$2^n (n+1) \geq 2^n \times 2 = 2^{n+1}$$



۱۶. محاسبات زیر نشان می‌دهند که این امکان وجود دارد که اعداد صحیح ۱۴، ۱۵ و ۱۶ را به صورت حاصل جمعی از فقط ۳ و یا ۸ (بدون توجه به ترتیب) بنویسیم.

$$14 = 3 + 3 + 8$$

$$15 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

$$16 = 8 + 8$$

براساس این سه عدد، حدس زیر را تنظیم می‌کنیم:

برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ که $n \geq 14$ است، $S(n)$ می‌توان n را به صورت حاصل جمعی از ۳ و یا ۸ها نوشت. این حدس را ثابت نمایید.

حل:

از استقرای قوی استفاده می‌نماییم. $S(14)$ ، $S(15)$ و $S(16)$ درست هستند.

فرض می‌گیریم $S(14)$ ، $S(15)$ ، $S(16)$ ، $\dots$ ، $S(k-2)$ ، $S(k-1)$ و $S(k)$ درست هستند.

$S(k-2)$ به صورت جمعی از ۳ها و یا ۸ها نوشته می‌شود. در نتیجه: $(k-2) + 3 = (k+1)$ را

نیز می‌توان به صورت حاصل جمعی از ۳ها و یا ۸ها نوشت. در نتیجه بنا به اصل استقرای

ریاضی قوی $S(n)$ به ازای هر $n \geq 14$ درست است.



۱۷. اگر عالم سخن مجموعه $U = \{-1, 1, 2\}$ باشد و $p(x): x^2 < 2$ و $q(x): x > 1$ باشند،

کدام یک از گزاره‌های زیر درست خواهند بود؟

$$\forall x [p(x) \vee q(x)] \quad \text{الف)}$$

ب) $\exists x[p(x) \wedge q(x)]$

ج) $\forall x[\neg p(x) \wedge \neg q(x)]$

د) $\forall x [\neg p(x) \vee q(x)]$

حل:

در ابتدا ارزش هر کدام از گزاره‌ها را به ازای عناصر عالم سخن به دست می‌آوریم:

	$p(x)$	$q(x)$
-۱	T	F
۱	T	F
۲	F	T

الف) با توجه به جدول فوق به ازای هر عضو از عالم سخن، یکی از گزاره‌ها ارزش درست دارد، بنابراین این گزاره سوردار ارزش درست دارد.

ب) این گزاره ارزش نادرست دارد. زیرا به ازای هیچ کدام از اعضای عالم سخن، هر دو گزاره توأمأً درست نیستند.

ج) این گزاره نادرست است. زیرا به ازای هیچ کدام از اعضای عالم سخن، هر دو گزاره توأمأً دارای ارزش نادرست نیستند.

د) با توجه به جدول فوق این گزاره نیز دارای ارزش نادرست است. زیرا به-عنوان مثال در $p(-۱)$ و $q(-۱)$ هر دو دارای ارزش درست هستند.



۱۸. فرض کنید عالم سخن، مجموعه اعداد صحیح باشد. عبارات زیر را به صورت گزاره-های سوردار نوشته و نقیض آن‌ها را بیابید.

الف- اگر x فرد باشد آن گاه $x-۱$ زوج است.

ب- به ازاء هر عدد صحیح x ، عدد صحیح y ای وجود دارد به طوری که $x+y \neq ۷$

ج- به ازاء هر عدد صحیح x ، عدد صحیح y ای وجود دارد که اگر x زوج و y بر ۳ بخشپذیر باشد، آن گاه xy بر ۶ بخشپذیر است.

حل:

الف) فرض کنید:

$p(x)$: x فرد است.

$q(x)$: $x-1$ زوج است.

گزاره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\forall x \, p(x) \rightarrow q(x)$$

این گزاره دارای ارزش درست است (اثبات بر عهده دانشجو). نقیض گزاره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\neg [\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]] \equiv \exists x \neg [p(x) \rightarrow q(x)] \equiv \exists x [p(x) \wedge \neg q(x)]$$

یعنی x ی وجود دارد که فرد است اما $x-1$ زوج نیست.

ب) گزاره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\forall x \, \exists y : x+y \neq 7$$

این گزاره ارزش درست است. نقیض گزاره به صورت زیر است:

$$\neg [\forall x \, \exists y : x+y \neq 7] \equiv \forall x \neg [\exists y : x+y \neq 7] \equiv \exists x \, \forall y \, x+y=7$$

یعنی x ی وجود دارد که به ازای هر y رابطه $x+y=7$ برقرار است.

ج) گزاره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\forall x \, \exists y \, \forall i,j,k \, (x=2i \wedge y=3j \rightarrow xy=6k)$$

ارزش این گزاره درست است. نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$\neg (\forall x \, \exists y \, \forall i,j,k \, (x=2i \wedge y=3j \rightarrow xy=6k))$$

$$\equiv \exists x \, \forall y \, \exists i,j,k \, (x=2i \wedge y=3j \wedge xy \neq 6k)$$

یعنی عدد زوج x ی وجود دارد که به ازای هر y ی مضرب ۳، حاصل xy مضرب ۶ نمی‌شود.



۱۹. آیا هم‌ارزی $\forall x [P(x) \vee q(x)] \equiv \forall x \, p(x) \vee \forall x \, q(x)$ برقرار است؟

حل:

فرض کنید $p(x): x+2=3$ و $q(x): x+2 \neq 3$ و عالم سخن مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ باشد. در این صورت $\forall x [P(x) \vee q(x)]$ درست است ولی $\forall x p(x) \vee \forall x q(x)$ درست نیست. بنابراین این هم‌ارزی برقرار نیست.



۲۰. هم‌ارز گزاره نقیض‌دار $\neg [\forall x \in \mathbb{N}, [(x \leq 10) \wedge (x \text{ is not odd})]]$ را به دست آورید: (odd به معنی فرد).

حل:

$$\begin{aligned} & \neg [\forall x \in \mathbb{N}, [(x \leq 10) \wedge (x \text{ is not odd})]] \\ &= \exists x \in \mathbb{N}, \neg [(x \leq 10) \wedge (x \text{ is not odd})] \\ &= \exists x \in \mathbb{N}, [\neg (x \leq 10) \vee \neg (x \text{ is not odd})] \\ &= \exists x \in \mathbb{N}, [(x > 10) \vee (x \text{ is odd})] \end{aligned}$$



تمرین‌های فصل

۱. در قطعه برنامه پاسکال زیر تمامی متغیرها صحیح هستند. چند بار دستور *writeln* اجرا می‌شود؟

```
for i=۱ to ۱۰ do
  for j=۱ to ۵ do
    if i<>j then
      writeln('the sum of i and j is:',i+j);
```

۲. قطعه‌ای از یک برنامه پاسکال یک حلقه *Repeat-Until* دارد که دارای ساختاری به صورت زیر است:

```
Repeat
.....
.....
Until ((x <> ۰) and (y > ۰)) or (not ((w > ۰) and (t = ۳)));
```

به ازای هر دسته از مقادیر زیر که به متغیرهای x, y, w, t نسبت داده می‌شود، تعیین کنید که آیا این حلقه پایان می‌پذیرد یا خیر؟

الف) $x=۷, y=۲, w=۵, t=۳$

ب) $x=۰, y=۲, w=-۳, t=۳$

ج) $x=۱, y=-۱, w=۱, t=۳$

۳. اگر گزاره‌های p, q, r, s به ترتیب (از چپ) دارای ارزش T, T, F, F باشند، ارزش گزاره‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$

ب) $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (s \rightarrow r)$

ج) $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \vee q)$

د) $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s))$

ه) $(p \wedge r) \leftrightarrow s$

۴. نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را به دست آورید.
الف) اگر مطالعه کند، در امتحان موفق می‌شود.

ب) او شنا می‌کند اگر و فقط اگر آب، گرم باشد.

ج) اگر او مطالعه کند، به دانشگاه یا به مرکز فنی و حرفه‌ای می‌رود.

۵. تحقیق کنید که $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$ یک گزاره همیشه درست است.

۶. کدام یک از گزاره‌های زیر راستگو هستند؟

الف) $p \rightarrow q$

ب) $p \leftrightarrow q$

ج) $\neg(\neg(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q))$

د) $\neg p \rightarrow \neg p$

۷. فرض کنید p و q گزاره‌هایی هستند که به ازای آنها استلزام $p \rightarrow q$ دروغ باشد. ارزش درستی هر یک از گزاره‌های زیر را بررسی نمایید.

الف) $p \wedge q$

ب) $\neg p \vee q$

ج) $q \rightarrow p$

د) $\neg q \rightarrow \neg p$

۸. کدام یک از هم‌ارزی‌های زیر صحیح است؟

الف) $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \equiv p$

ب) $p \rightarrow q \equiv \neg(p \vee q)$

ج) $[(p \vee q) \rightarrow r] \equiv [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)]$

د) $[p \rightarrow (q \vee r)] \equiv [\neg r \rightarrow (p \rightarrow q)]$

ه) $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \leftrightarrow \neg q) \equiv (\neg p \leftrightarrow q)$

۹. نشان دهید که هم‌ارزی‌های زیر برقرار می‌باشند.

الف) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$

ب) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$

ج) $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \vee r)$

$$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r) \quad (د)$$

۱۰. درستی استلزام منطقی $p \leftrightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q$ را ثابت کنید.

۱۱. نشان دهید استلزام منطقی $p \leftrightarrow \neg q \Rightarrow p \rightarrow q$ برقرار نیست.

۱۲. پنج نفر A, B, C, D, E وارد یک سایت گفتگوی اینترنتی شده‌اند. آیا با داشتن

اطلاعات زیر می‌توان گفت کدام یک از آنها الان در حال گفتگو هستند؟

- A یا B یا هر دو در حال گفتگو هستند.
- C یا D ، (نه هر دو با هم) در حال گفتگو هستند.
- اگر E در حال گفتگو باشد، C هم در حال گفتگو خواهد بود.
- A و D یا هر دو در حال گفتگو می‌باشند، یا هیچ کدام.
- اگر B در حال گفتگو باشد، آن‌گاه A و E نیز در حال گفتگو خواهند بود.

۱۳. اگر آرمیا بخواهد به جلسه‌ای که سه‌شنبه صبح دارد برود آن‌گاه باید صبح آن روز، زود بیدار شود. اگر دوشنبه شب به مهمانی برود، آن‌گاه بعد از ساعت ۱۱ شب به خانه باز خواهد گشت. اگر آرمیا در چنین وقتی به خانه بازگردد و صبح روز بعد زود بیدار شود، آن‌گاه مجبور است با کمتر از ۷ ساعت خواب سرکار حاضر شود. متأسفانه، آرمیا نمی‌تواند با کمتر از ۷ ساعت خوب کار کند. در نتیجه آرمیا یا باید مهمانی نرود یا در جلسه سه‌شنبه صبح حضور نیابد. این استنتاج را به صورت نماد نوشته و اعتبار آن را بررسی نمایید.

۱۴. کدام یک از استنتاج‌های زیر معتبر است؟

$$[p \rightarrow (q \vee w), (\neg q \wedge p), (p \rightarrow \neg w)] \vdash \neg y \quad \text{الف}$$

$$p \rightarrow q \vdash (w \vee p) \rightarrow (w \vee q) \quad \text{ب}$$

$$p \rightarrow q \vdash (w \rightarrow p) \rightarrow (w \rightarrow q) \quad \text{ج}$$

$$[r, r \rightarrow p, (p \vee q) \rightarrow w] \vdash \neg w \quad \text{د}$$

۱۵. اعتبار استنتاج زیر را بررسی کنید.

$$\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ \hline \therefore S \end{array}$$

که در آن:

S_1 : اگر دو ضلع یک مثلث برابر باشند، آن گاه زاویه مقابل آنها برابرند.

S_2 : دو ضلع یک مثلث برابر نیستند.

S : زاویه های مقابل مثلث برابر نیستند.

می باشند.

۱۶. می خواهیم نشان دهیم استنتاج زیر در منطق گزاره ها معتبر نیست.

$$(p \wedge q) \vee r, q \rightarrow (r \vee s), \neg p \rightarrow \neg q \vdash p \vee s$$

بررسی نمایید کدام ارزش دهی به گزاره های p, q, r, s این نامعتبر بودن را نشان می دهد:

(الف) (F, T, T, T)

(ب) (T, T, F, T)

(ج) (F, T, T, F)

(د) (F, T, F, F)

۱۷. هر یک از موارد زیر را با استقرا ثابت کنید.

(الف) $\forall n \geq 3: 2^n \geq n^2$

(ب) $\sum_{i=1}^n 2 \left(3^{i-1} \right) = 3^n - 1$

۱۸. ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ که $n \geq 24$ است، می توان n را به صورت حاصل جمع

از ۵ ها و یا ۷ ها نوشت.

۱۹. دنباله اعداد صحیح $a_0, a_1, \dots$ را که در آن $a_0 = 1, a_1 = 2$ و $a_3 = 3$ را که در آن

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ ($n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 3$) در نظر بگیرید. با استفاده از استقرای قوی ثابت

کنید که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطه $a_n \leq 3^n$ برقرار است.

۲۰. عبارات زیر را به صورت گزارهٔ سوردار نوشته، سپس آن‌ها را اثبات یا رد کنید.

الف) اگر a, b مجذور کامل باشند، آن‌گاه $a+b$ نیز مجذور کامل است.

ب) اگر a, b مجذور کامل باشند، آن‌گاه ab نیز مجذور کامل است.

ج) اگر $\forall x, y \in \mathbb{R}, x+y \geq 100$ آن‌گاه $y \geq 50$ یا $x \geq 50$

د) اعداد مثبت m, n وجود دارند که $m+n, n, m$ همگی مجذور کامل باشند.

۲۱. ارزش درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را به دست آورید که در آن

عالم سخن مجموعه $\{1, 2, 3\}$ است.

الف) $\exists x \forall y, x^2 < y+1$

ب) $\forall x \exists y, x^2 + y^2 < 12$

ج) $\forall x \forall y, x^2 + y^2 < 12$

۲۲. نقیض گزاره‌های زیر را بیابید:

الف) به ازای همهٔ اعداد صحیح n ، اگر n بر ۲ بخشپذیر نباشد، آن‌گاه n فرد است (عالم سخن اعداد صحیح).

ب) اگر n, m, k اعدادی صحیح باشند، به طوریکه $k-m$ و $m-n$ فرد باشند، آن‌گاه $k-n$ زوج است (عالم سخن اعداد صحیح).

ج) به ازای همهٔ اعداد حقیقی x ، اگر $7 < x-31$ آن‌گاه $10 < x < 4$ - (عالم سخن اعداد حقیقی).

د) هوا روشن است و تمام مردم از خواب برخاسته‌اند.

ه) بعضی از دانشجویان تکالیف خود را انجام نداده‌اند یا استاد غیبت کرده است.

۲۳. فرض کنید عالم سخن برای متغیرهای گزاره‌های زیر مرکب از همهٔ اعداد حقیقی باشد. در هر حالت نقیض گزاره داده شده را بنویسید و آن را ساده‌نمایید.

الف) $\forall x \forall y [(x > y) \rightarrow (x-y > 0)]$

ب) $\forall x \forall y [(x > 0) \wedge (y = \log_{10} x)] \rightarrow (x = 10^y)$

ج) $\forall x \exists y [(x < y) \rightarrow \exists z (x < z < y)]$

د) $[\forall x \forall y ((x > 0) \wedge (y > 0))] \rightarrow [\exists z (xz > y)]$

۲۴. نقیض هریک از گزاره‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $\forall x \exists y (p(x) \vee q(y))$

ب) $\exists x \forall y (p(x,y) \rightarrow q(x,y))$

ج) $\exists y \exists x (p(x) \wedge \neg q(y))$